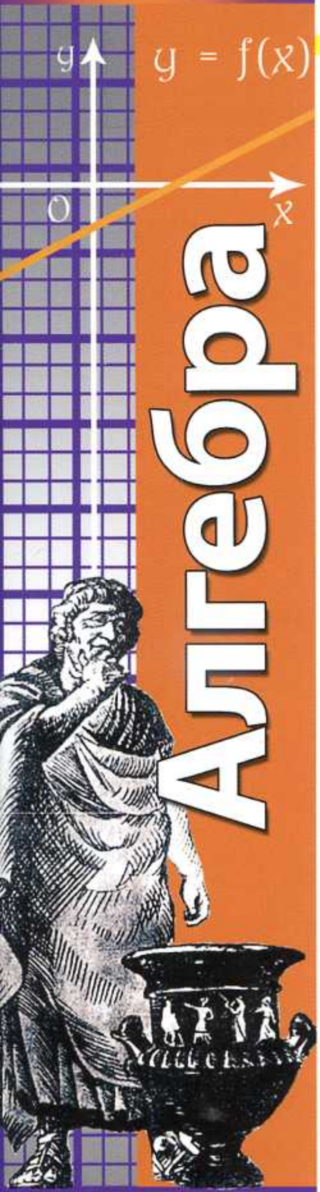
ФГОС

УМК



С.Г. Журавлев, Ю.В. Перепелкина

Рабочая тетрадь по алгебре

К учебнику С.М. Никольского и др. «Алгебра. 8 класс»

учени __________ класса ________

____________ школы ____________

____

____

8

класс

ЭКЗАМЕН

8

Учебно-методический комплект

С.Г. Журавлев, Ю.В. Перепелкина

Рабочая тетрадь по **АЛГЕБРЕ**

К учебнику С.М. Никольского и др.
«Алгебра. 8 класс»

8 класс

Рекомендовано
Российской Академией Образования

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА • 2013

УДК 373:512
ББК 22.14я72
Ж91

Имена авторов и название цитируемого издания указаны на титульном листе данной книги (ст. 1274 п. 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации).

Журавлев, С.Г.

Ж91 Рабочая тетрадь по алгебре: 8 класс: к учебнику С.М. Никольского и др. «Алгебра. 8 класс» / С.Г. Журавлев, Ю.В. Перепелкина. — М. : Издательство «Экзамен», 2013. — 128 с. (Серия «Учебно-методический комплект»)

ISBN 978-5-377-06156-4

Данное пособие полностью соответствует федеральному государственному образовательному стандарту (второго поколения).

Рабочая тетрадь адресована школьникам, которые изучают алгебру по учебнику С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкина «Алгебра. 8 класс».

Издание содержит практические задания, необходимые для закрепления и развития знаний, умений и навыков, предусмотренных программой 8 класса.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных учреждениях.

УДК 373:512
ББК 22.14я72

Учебное издание

Журавлев Сергей Георгиевич
Перепелкина Юлианна Вячеславовна

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ ПО АЛГЕБРЕ

8 класс

К учебнику С.М. Никольского и др. «Алгебра. 8 класс»

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. АЕ51. Н 16054 от 28.02.2012 г.

Главный редактор *Л.Д. Лаппо*. Редактор *Г.А. Лонцова*. Технический редактор *Л.В. Павлова*
Корректор *Н.С. Садовникова*. Дизайн обложки *А.А. Козлова*. Компьютерная верстка *М.А. Серова*

107045, Москва, Луков пер., д. 8, www.examen.biz.
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz; по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Формат 70х100/16. Гарнитура «Школьная». Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 2,12.
Усл. печ. л. 6,15. Тираж 10 000 экз. Заказ № 7850/13.

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт», г. Тверь, www.pareto-print.ru

По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).

ISBN 978-5-377-06156-4

Оглавление

ГЛАВА I. ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИИ. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ 5
§1. Функции и графики 5
1.1. Числовые неравенства 5
1.2. Координатная ось 6
1.3. Множества чисел 7
1.4. Декартова система координат на плоскости 8
1.5. Понятие функции 11
1.6. Понятие графика функции 12
§2. Функции $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$ 15
2.1. Функция $y = x$ и её график 15
2.2–2.3. Функция $y = x^2$ и её график 16
2.4, 2.5. Функция $y = \frac{1}{x}$ и её график 18
§3. Квадратные корни 22
3.1. Понятие квадратного корня 22
3.2. Арифметический квадратный корень 26
3.3. Квадратный корень из натурального числа 27
3.4–3.5. Приближенное вычисление квадратных корней.
Свойства арифметических квадратных корней 27
Дополнения к главе I 29
1. Множества 29

ГЛАВА II. КВАДРАТНЫЕ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 31
§4. Квадратные уравнения 31
4.1. Квадратный трёхчлен 31
4.2. Понятие квадратного уравнения 33
4.3. Неполное квадратное уравнение 34
4.4. Решение квадратного уравнения общего вида 35
4.5. Приведённое квадратное уравнение 36
4.6. Теорема Виета 37
4.7. Применение квадратных уравнений к решению задач 41
§5. Рациональные уравнения 45
5.1. Понятие рационального уравнения 45
5.2. Биквадратное уравнение 49
5.3. Распадающееся уравнение 51
5.4. Уравнение, одна часть которого алгебраическая дробь,
а другая — нуль 52
5.5. Решение рациональных уравнений 53
5.5. Решение задач при помощи рациональных уравнений 55

Дополнения к главе II 59
1. Разложение многочленов на множители и решение уравнений 59
2. Комплексные числа 62

ГЛАВА III. ФУНКЦИИ $y = kx + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y=\frac{k}{x - x_0}+y_0$ 67
§6. Линейная функция 67
6.1–6.3. Прямая пропорциональность. График функции $y = kx$. Линейная функция и её график 67
6.4. Равномерное движение 71
6.5. Функция $y = |x|$ и её график 79
§7. Квадратичная функция 84
7.1–7.2. Функция $y = ax^2$ 84
7.3. График функции $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ 87
7.4. Квадратичная функция и её график 89
§8. Функция $y=\frac{k}{x - x_0}+y_0$ 91
8.1–8.3. Обратная пропорциональность. Функция $y=\frac{k}{x}$ 91
8.4. График функции $y=\frac{k}{x - x_0}+y_0$ 93
Дополнения к главе III 95
1. Построение графиков функций, содержащих модули 95
2. Уравнение прямой, уравнение окружности 104

ГЛАВА IV. СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 108
§9. Системы рациональных уравнений 108
9.1. Понятие системы рациональных уравнений 108
9.2. Системы уравнений первой и второй степени 109
9.3. Решение задач при помощи систем уравнений первой и второй степени 112
9.4. Системы рациональных уравнений 113
9.5. Решение задач при помощи систем рациональных уравнений 114
§10. Графический способ решения систем уравнений 117
10.1. Графический способ решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными 117
10.2. Графический способ исследования системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными 119
10.3. Решение систем уравнений первой и второй степени графическим способом 122
10.4. Примеры решения уравнений графическим способом 123
Дополнения к главе IV 126
1. Вероятность события 126

ГЛАВА I. ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИИ. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

§1. Функции и графики

1.1. Числовые неравенства

1. Допишите числа в неравенствах таким образом, чтобы знак неравенства не изменился:

а) $-5 \cdot \ldots > \ldots \cdot 5$

б) $9 \cdot \ldots < 8 \cdot \ldots$

в) $3 \cdot \ldots > \ldots \cdot 5$

г) $-3 \cdot \ldots > 4 \cdot \ldots$

д) $-5 \cdot \ldots > \ldots \cdot 5$

е) $-5 \cdot \ldots > \ldots \cdot 5$

ж) $\frac{1}{4} > \frac{1}{\ldots}$

з) $\frac{1}{3} < \frac{1}{\ldots}$

и) $\frac{1}{7} > \frac{1}{\ldots}$

к) $\frac{1}{5} > \frac{1}{\ldots}$

л) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 < (\ldots)^4$

м) $(\ldots)^2 > \left(\frac{1}{8}\right)^3$

н) $\frac{1}{7} > \frac{1}{\ldots}$

о) $\frac{1}{5} > \frac{1}{\ldots}$

п) $4 < \ldots \le 7$

р) $-3 \le \ldots < -1$

2. Поставьте знак неравенства между числами:

а) $-3 \; \square \; -8$

б) $2 \; \square \; 9$

в) $-18 \; \square \; -9$

г) $-1 \; \square \; -3$

3. Сравните крайние числа из двух верных неравенств.

Например: $-2 < 7$ и $-6 > -8$, значит, $-2 > -8$.

а) $-3 > -5$ и $7 < 9$, значит, ________________________

б) $0 > -1$ и $3 > 1$, значит, ________________________

в) $-8 < -5$ и $-3 < -4$, значит, ________________________

г) $9 > 6$ и $-6 < -2$, значит, ________________________

4. Запишите неравенства, получающиеся при замене чисел в правой и левой части неравенств на противоположные.

Например: $-3 > -4$, значит, $3 < 4$.

а) $2 > -1$, значит, ________________________

б) $-3 < 0$, значит, ________________________

в) $4 > 2$, значит, ________________________

г) $8 < 9$, значит, ________________________

1.2. Координатная ось

5. Запишите числа в порядке, согласно которому они располагаются на оси Ox.

Например, числа $-1, 8, 0, 3, -4, 6$ будут располагаться на оси Ox следующим образом: $-4, -1, 0, 3, 6, 8$.

а) $-8, 3, -3, 1, 5, 4$ ________________________

б) $0, 6, -7, 4, -1, 2$ ________________________

в) $2, 1, 0, -1, 4, -9$ ________________________

г) $-6, 2, 3, -8, 4, -5$ ________________________

6. Решите уравнение:

а) ***Пример.*** $|14x + 8| = 36$

Решение. По определению модуля $14x + 8$ равно -36 или $+36$. Тогда $14x + 8 = -36$ или $14x + 8 = 36$ и $x_1 = -\frac{22}{7}$, $x_2 = 2$.

б) $|7x - 15| = 6$

в) $||23x + 3| = 89$

7. Решите уравнение $|4x - 9| = |6x - 15|$.

8. Решите уравнение $||2x| - 3| = 1$.

1.3. Множества чисел

9. Поставьте знак $\in$ или $\notin$, обозначив принадлежность числа к множеству чисел.

а) -3 ☐ $[2; +\infty)$

б) -1 ☐ $(-2; 4)$

в) -5 ☐ $(-5; -1]$

г) 4 ☐ $[-1; 4]$

10. Запишите интервалы в виде двойных неравенств:

а) $[-3; 0)$ ____________________

б) $(4; 8)$ ____________________

в) $[-1; 1]$ ____________________

г) $(-3; 6]$ ____________________

1.4. Декартова система координат на плоскости

11. В какой четверти располагаются следующие точки?

а) ***Пример.*** $B(-1;\ 4)$: во II.

б) $C(2;\ -5)$: ____________________

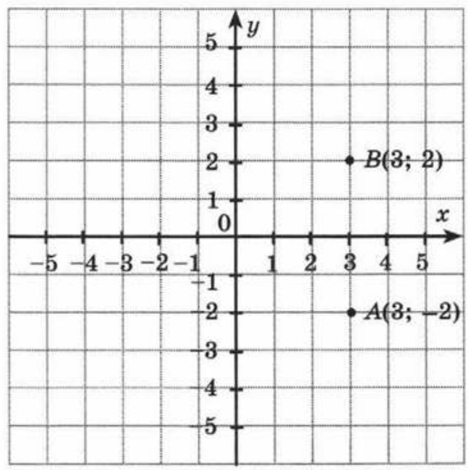
в) $D(3;\ 4)$: ____________________

г) $E(-10;\ -2)$: ____________________

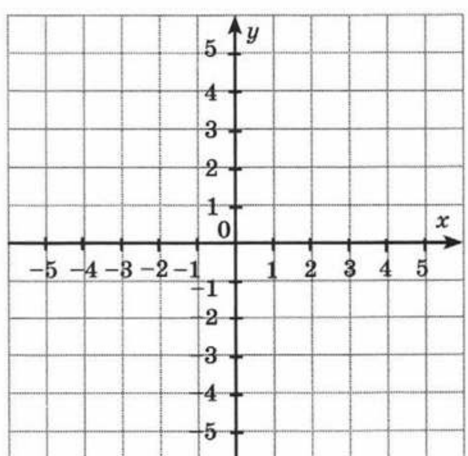
12. Постройте точки, симметричные данным:

а) ***Пример.*** $A(3;\ -2)$ относительно оси Ox.

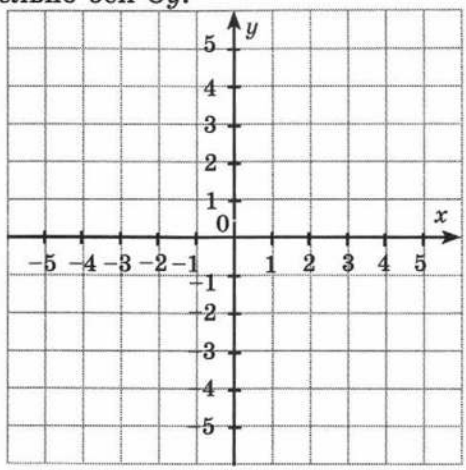
Решение:



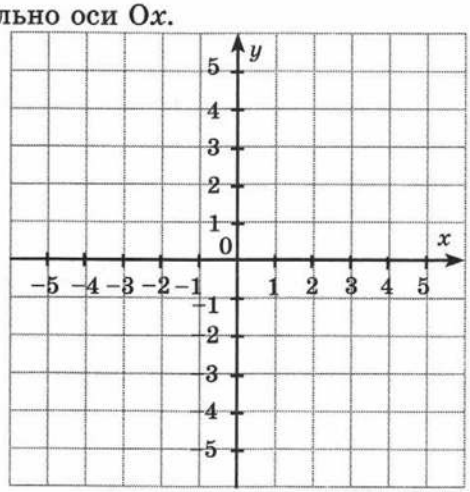
б) $C(-5;\ -4)$ относительно оси Oy.



в) $D(3; -4)$ относительно оси Oy.

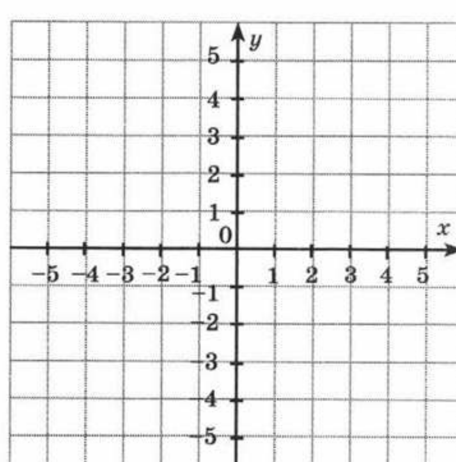


г) $E(1; 3)$ относительно оси Ox.

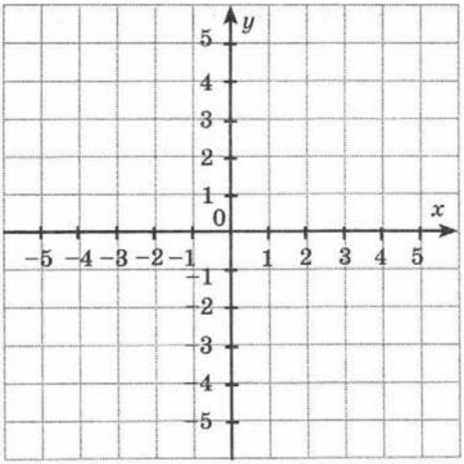


13. Постройте прямоугольник по координатам его вершин и найдите его периметр:

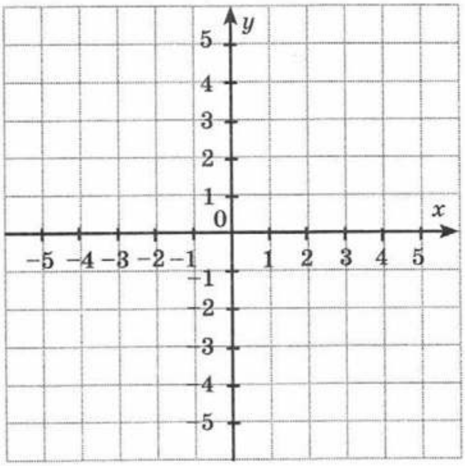
а) $A(1; -3)$;
$B(1; -1)$;
$C(4; -1)$;
$D(4; -3)$.



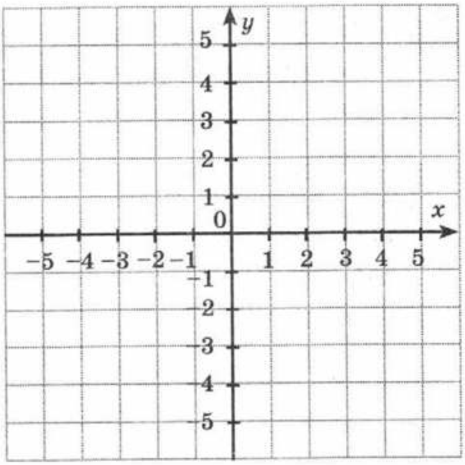
б) $A(0;\ 0)$;
$B(0;\ 3)$;
$C(2;\ 3)$;
$D(2;\ 0)$.



в) $A(-2;\ 2)$;
$B(1;\ 2)$;
$C(1;\ -2)$;
$D(-2;\ -2)$.



г) $A(-2;\ -2)$;
$B(-2;\ 0)$;
$C(1;\ 0)$;
$D(1;\ -2)$.



1.5. Понятие функции

14. Для функции $y = x^3$ вычислите:

а) ***Пример.*** $y(2) = 8$

б) $y(-1) =$ ______________________

в) $y(4) =$ ______________________

г) $y(-3) =$ ______________________

15. Для функции $y = x^2 + 3$ вычислите:

а) $y(-1) =$ ______________________

б) $y(9) =$ ______________________

в) $y(5) =$ ______________________

г) $y(2) =$ ______________________

16. Определите формулу функции, если она задана таблицей:

а)

x	-3	0	2	1	5
y	0	6	10	8	16

б)

x	2	-1	3	-2	0
y	-6	$-7,5$	$-5,5$	-8	-7

в)

x	4	3	9	−3	0
y	11	7	31	−17	−5

г)

x	−1	−2	3	−3	1
y	7	8	3	9	5

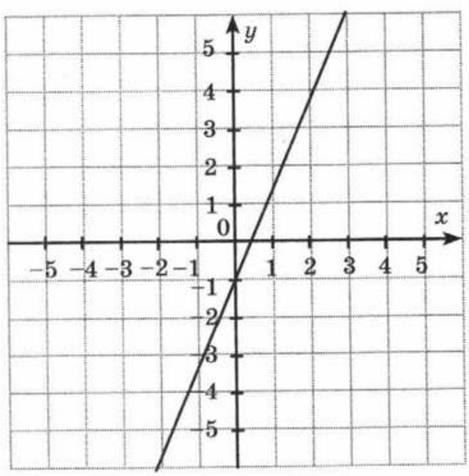
1.6. Понятие графика функции

16. Постройте график функции по данным из таблицы, приведённой ниже.

а) ***Пример.***

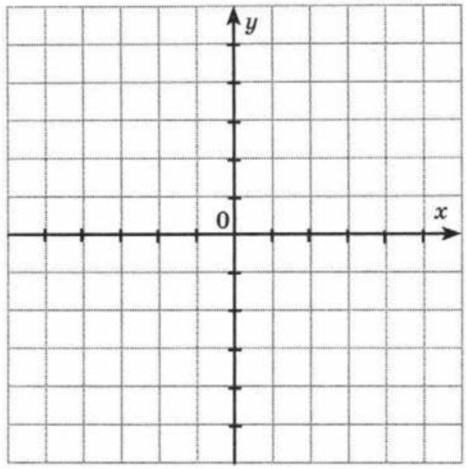
x	−3	−2	−1	1	5
y	−7	−5	−3	1	9

Решение:



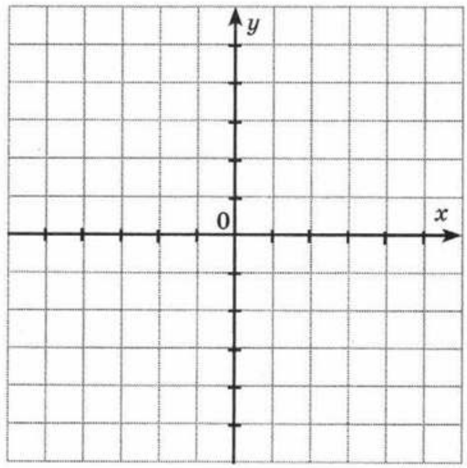
б)

x	−3	−2	−1	1	2
y	−19	−12	−5	9	16



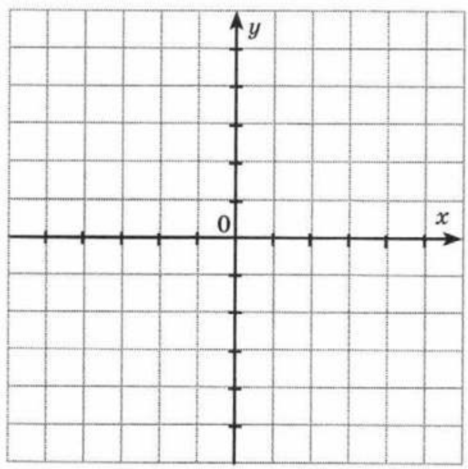
в)

x	−9	−3	0	3	9
y	−13	−7	−4	−1	5



г)

x	−1	0	1	5	10
y	−12	−8	−4	12	32



17. По графику, изображённому на рисунке 1, найдите значения y при следующих значениях x:

а) ***Пример.*** $x = -3$ при $y = 2$.

б) $x = 1$ при ______________

в) $x = 3$ при ______________

г) $x = 2$ при ______________

д) $x = 0$ при ______________

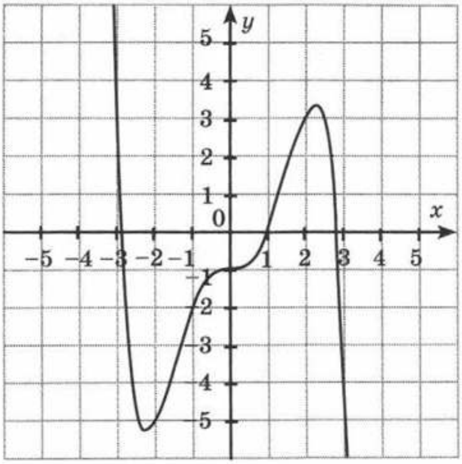


Рис. 1

18. По графику, изображённому на рисунке 2, найдите значения x при следующих значениях y:

а) $y = 1$ при ______________

б) $y = 0$ при ______________

в) $y = 2$ при ______________

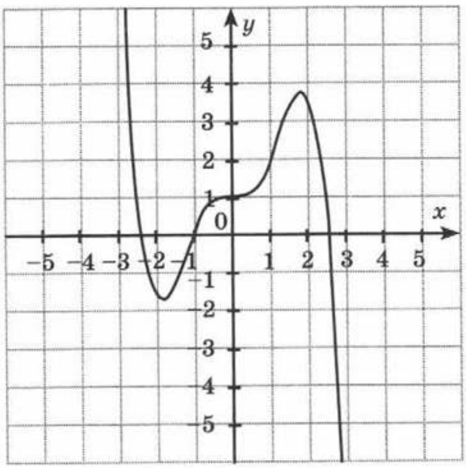


Рис. 2

§2. Функции $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$

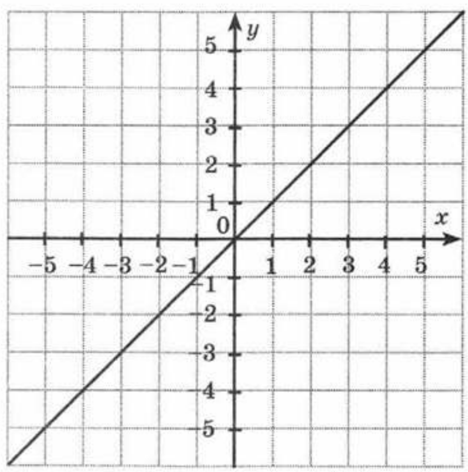
2.1. Функция $y = x$ и её график

1. Постройте график функции:

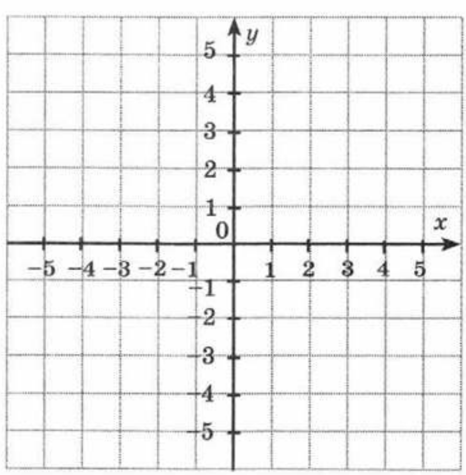
а) ***Пример.*** $y = x$

Решение.

Если $x = 1$, то $y = 1$. Поэтому точка (1; 1) принадлежит графику данной функции. Это заключение справедливо и для точки (0; 0). Для построения графика функции $y = x$ проведём прямую, проходящую через точки (0; 0) и (1; 1). Эта прямая делит первый и третий координатные углы пополам.



б) $y = -x$



2. Какие точки принадлежат графику функции $y = x$?

а) $A(4;\ 4)$, $B(2;\ -2)$, $C(3;\ 3)$ ____________________

б) $A(-4;\ 1)$, $B(-3;\ -3)$, $C(6;\ 6)$ ____________________

в) $A(0;\ 0)$, $B(-2;\ -2)$, $C(9;\ -9)$ ____________________

г) $A(1;\ 1)$, $B(-4;\ -5)$, $C(2;\ 2)$ ____________________

3. Какие точки принадлежат графику функции $y = -x$?

а) $A(-4;\ 4)$, $B(0;\ 0)$, $C(5;\ -5)$ ____________________

б) $A(-1;\ -1)$, $B(-2;\ -2)$, $C(8;\ -8)$ ____________________

в) $A(6;\ 6)$, $B(-1;\ 0)$, $C(12;\ 12)$ ____________________

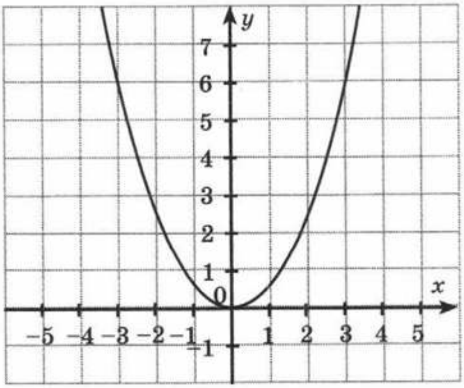
г) $A(-1;\ 1)$, $B(-7;\ -7)$, $C(3;\ 2)$ ____________________

2.2, 2.3. Функция $y = x^2$ и её график

4. ***Пример.*** Постройте график функции $y = x^2$ и опишите её свойства.

Решение.
Дадим независимой переменной x несколько конкретных значений и вычислим соответствующие значения зависимой переменной y (по формуле $y = x^2$):

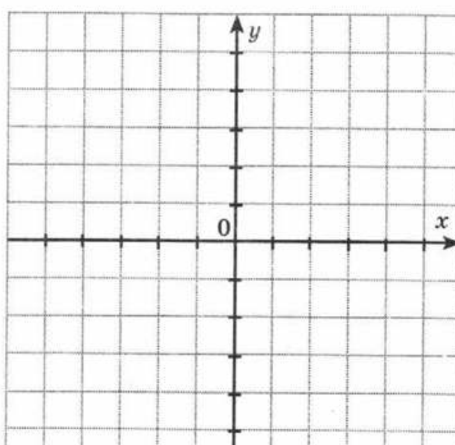
x	0	1	2	3	−1	−2	−3
y	0	1	4	9	1	4	9



Опишем *геометрические свойства* построенной на рисунке параболы.
а) Отметим, что если провести выше оси x любую прямую, параллельную оси x, то эта прямая пересечёт параболу в двух точках, расположенных на равных расстояниях от оси y, но по разные стороны от неё. То же самое можно сказать и о точках (1; 1) и (−1; 1); (2; 4) и (−2; 4); (3; 9) и (−3; 9). Поэтому говорят, что ось y является осью симметрии параболы $y = x^2$ или что парабола симметрична относительно оси y.
б) Замечаем, что ось симметрии как бы разрезает параболу на две части, которые обычно называют *ветвями* параболы.
в) Замечаем, что у параболы есть особая точка, в которой смыкаются обе ветви и которая лежит на оси симметрии параболы — точка (0; 0). Она называется *вершиной* параболы.
г) Когда одна ветвь параболы соединяется в вершине с другой ветвью, это происходит плавно, без излома; парабола как бы «прижимается» к оси абсцисс, т.е. парабола касается оси абсцисс.
На основе графика опишем некоторые свойства функции $y = x^2$:
а) $y = 0$ при $x = 0$, $y > 0$ при $x > 0$ и при $x < 0$;
б) $y_{\text{наим}} = 0$, а $y_{\text{наиб}}$ не существует;
в) функция $y = x^2$ убывает на луче $(-\infty; 0]$ — при этих значениях x функция убывает, двигаясь по параболе слева направо. Функция $y = x^2$ возрастает на луче $[0; +\infty)$ — при этих значениях x функция возрастает.

5. Пользуясь графиком параболы, найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2$:

x	y



а) на отрезке [1; 3]: $y_{\text{наиб.}}$ = ______________ ; $y_{\text{наим.}}$ = ______________
б) на отрезке [−3; −1,5]: $y_{\text{наиб.}}$ = ______________ ; $y_{\text{наим.}}$ = ______________
в) на отрезке [−3; 2]: $y_{\text{наиб.}}$ = ______________ ; $y_{\text{наим.}}$ = ______________

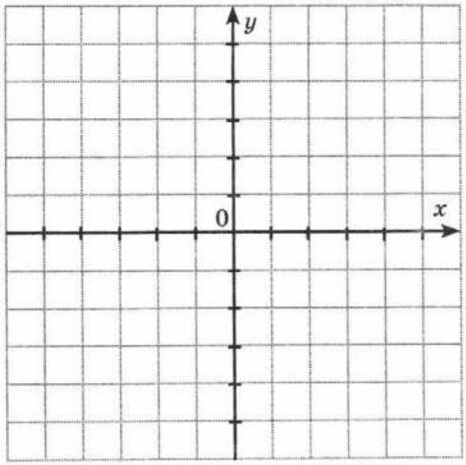
6. Найдите точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = x + 2$.

$y = x^2$

x	y

$y = x + 2$

x	y



2.4, 2.5. Функция $y = \frac{1}{x}$ и её график

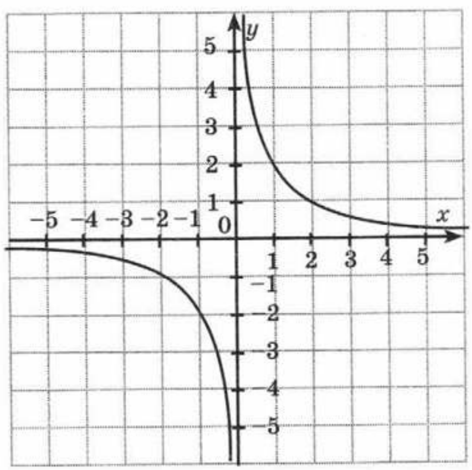
7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \frac{1}{x}$:

а) ***Пример.*** На отрезке $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$

Решение.

Построим график функции $y = \frac{1}{x}$ и выделим ту его часть, которая соответствует значениям переменной x из отрезка $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$. Для выделенной части графика находим:

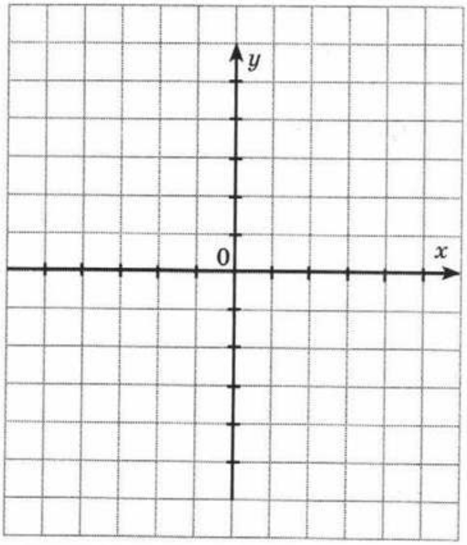
$y_{\text{наим}} = \frac{1}{4}$ (при $x = 4$); $y_{\text{наиб}} = 2$ (при $x = \frac{1}{2}$);



б) на отрезке [−8; −1]

8. Постройте график функции $y = \dfrac{-12}{x}$ и опишите её свойства.

x	y



9. Укажите, какие из нижеприведённых функций являются обратной пропорциональностью:

а) $y = \dfrac{3}{x}$ ______________________

б) $y = 2x + 4$ ______________________

в) $y = -\dfrac{2}{x}$ ______________________

г) $y = \dfrac{1}{4}x$ ______________________

д) $y = \dfrac{x}{5}$ ______________________

е) $y = \dfrac{1}{2x}$ ______________________

ж) $y = -\dfrac{3x}{4}$ ______________________

з) $y = -\dfrac{4}{11x}$ ______________________

10. В каких координатных четвертях расположен график следующей функции?

а) $y = -\dfrac{x}{3}$ ____________________

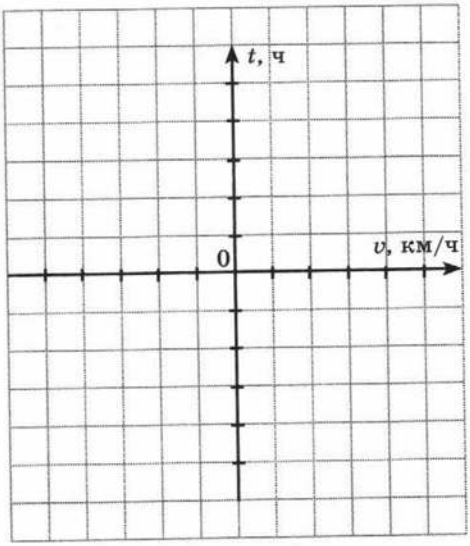
в) $y = -\dfrac{2}{7x}$ ____________________

б) $y = \dfrac{5}{x}$ ____________________

г) $y = \dfrac{4}{x}$ ____________________

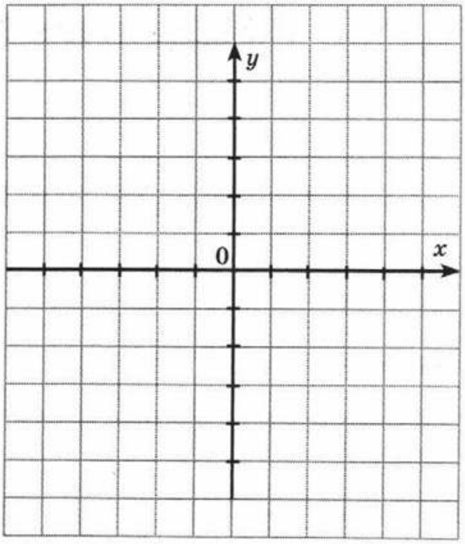
11. Скорость пешехода v км/ч; t ч – время. Сколько времени потребуется пешеходу, чтобы пройти 12 км? Выразите функциональную зависимость времени t от скорости v аналитически и графически.

t	v



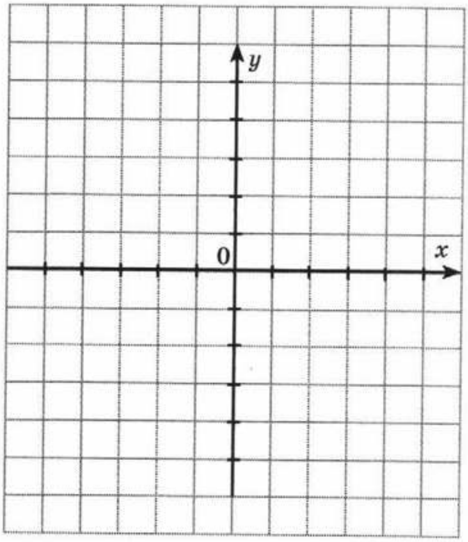
12. Площадь прямоугольника 60 кв. см. Одна сторона прямоугольника a см, другая b см. Запишите аналитическую зависимость b от a, а затем, положив $y = b$ и $x = a$, постройте график.

x	y



13. P руб. — цена товара, M ед. — количество товара. Сколько единиц товара можно купить на 1000 руб? Выразите аналитическую зависимость M от P и постройте график, положив $y = M$, $x = P$.

x	y



§3. Квадратные корни

3.1. Понятие квадратного корня

1. Вычислите:

а) ***Пример.*** $\sqrt{36 \cdot 64 \cdot 9}$

Решение: Воспользовавшись первым свойством квадратных корней, получаем:

$\sqrt{36 \cdot 64 \cdot 9} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{64} \cdot \sqrt{9} = 6 \cdot 8 \cdot 3 = 144.$

б) $\sqrt{10\frac{9}{16}} =$

в) $\sqrt{37^2 - 12^2} =$

г) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{6} =$

д) $\sqrt{7056} =$

е) $\sqrt{0,49 \cdot 36} =$

ж) $\sqrt{\frac{81}{100}} =$

з) $\sqrt{1\frac{9}{16}} =$

и) $\sqrt{2\frac{1}{4}} =$

к) $\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}} =$

л) $\sqrt{100^2 - 96^2} =$

м) $\sqrt{24} : \sqrt{6} =$

2. Решите уравнение $0{,}5y^2 = 8$.

3. Найдите значение y, при котором $5 - 2\sqrt{y} = 0$.

4. Применив свойства арифметического квадратного корня, вычислите:

$\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} =$

5. Вычислите без помощи калькулятора:

$\sqrt{\frac{13^2 - 12^2}{81}} =$

6. Решите уравнения:

а) $6\sqrt{x} = 5$

б) $\sqrt{7x} = 1$

в) $\frac{1}{3\sqrt{x}} = 3$

г) $(\sqrt{x})^2 = 9$

д) $\sqrt{x+1} = 2$

е) $\frac{3}{\sqrt{x-5}} = 4$

ж) $\frac{15}{\sqrt{x-3}} = 3$

7. Вычислите:

а) $\sqrt{(3,8)^2} =$

б) $\sqrt{(-1,3)^2} =$

в) $\sqrt{(0,4)^2} =$

г) $\sqrt{(-6,19)^2} =$

д) $3\sqrt{(-17)^2} =$

е) $5\sqrt{(4,2)^2} =$

ж) $0,1\sqrt{(-73)^2} =$

з) $-0,4\sqrt{22^2} =$

и) $\sqrt{10^4} =$

к) $\sqrt{5^6} =$

л) $\sqrt{3^8} =$

м) $\sqrt{2^{10}} =$

н) $\sqrt{(-6)^4} =$

о) $\sqrt{(-3)^8} =$

п) $\sqrt{(-10)^6} =$

р) $\sqrt{(-3)^{10}} =$

3.2. Арифметический квадратный корень

9. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt{0,64 \cdot 25} =$

б) $\sqrt{\dfrac{81}{100}} =$

в) $\sqrt{(3,8)^2} =$

г) $\sqrt{3^8} =$

д) $\sqrt{1,44} - 2(\sqrt{0,6})^2 =$

е) $(2\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{2})^2 =$

ж) $0,5 \cdot \sqrt{121} + 3 \cdot \sqrt{0,81} =$

з) $\sqrt{144} - 0,5\left(\sqrt{12}\right)^2 =$

и) $\sqrt{3{,}5 - 2{,}5} =$	
к) $\sqrt{0{,}0009} =$	

3.3. Квадратный корень из натурального числа

10. Вычислите:

а) ***Пример.*** $\sqrt{49} =$ ____________________

Решение. $\sqrt{49} = 7$, поскольку $7 > 0$ и $7^2 = 49$.

б) $\sqrt{0} =$ ____________________

в) $\sqrt{-4} =$ ____________________

г) $\sqrt{5625} =$ ____________________

д) $\sqrt{0{,}25} =$ ____________________

е) $\sqrt{0{,}000004} =$ ____________________

ж) $\sqrt{17} =$ ____________________

з) $\sqrt{961} =$ ____________________

и) $\sqrt{121} =$ ____________________

к) $\sqrt{225} =$ ____________________

л) $\sqrt{2809} =$ ____________________

м) $\sqrt{810000} =$ ____________________

3.4–3.5. Приближённое вычисление квадратных корней. Свойства арифметических квадратных корней

11. ***Пример.*** Справедлива формула для записи второго приближения к значению корня квадратного из числа, если известно его некоторое (первое) значение:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right)$$

Уточните по приведённой формуле приближённое значение квадратного корня, используя приближение $x_1 = 1{,}414$ для $\sqrt{2}$.

Решение. В нашем случае $a = 2$. Поэтому

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(1{,}414 + \frac{2}{1{,}414}\right) \approx \frac{1}{2}(1{,}414 + 1{,}4144271) = 1{,}4142135...$$

Выполнив еще одно приближение, мы убедимся, что все выписанные знаки полученного ответа верны, т.е. число верных знаков удвоилось.

12. Найдите приближённые значения с точностью до 0,0001, взяв в качестве исходного приближения значения с точностью до двух знаков поле запятой (например, $\sqrt{5} = 2{,}23$ и т.д.)

а) $\sqrt{5} =$ ____________________

б) $\sqrt{40} =$ ____________________

в) $\sqrt{28} =$ ____________________

13. Найдите расстояние от вершины дерева до конца его тени, если высота дерева равна 12 м, а длина тени — 16 м.

14. Найдите расстояние между точками $M(3;\ 1)$ и $N(8;\ -11)$ координатной плоскости.

Дополнения к главе I

1. Множества

1. ***Пример.*** Запишите несколько чисел, которые являются элементами одновременно трёх множеств N, Z, Q.

Решение: Например, $45 \in N$, $45 \in Z$, $45 \in Q$.

2. Запишите несколько элементов множества Z, которые не являются элементами множества N.

____

____

3. Запишите несколько чисел, которые являются элементами множества N, но не являются элементами множества Z.

____

____

4. Запишите несколько чисел множества Q, которые не являются элементами множеств N и Z.

____

____

5. Задайте множество:

а) А — дней недели: ______________________

б) Б — чётных чисел: ______________________

в) В — двузначных натуральных чисел: ______________________

г) Г — множество четырёхугольников с попарно параллельными противоположными сторонами: ______________________

____

д) Д — множество букв, из которых состоит слово «БИОЛОГИЯ».

____

6. Выпишите на одной строке множество однозначных чисел (множество A), а на другой — множество двузначных чисел (множество B): 3, 10, 11, 30, 99, 7, 74, 58, 8, 0.

A: ______________________________

B: ______________________________

7. 12 карандашей раздали поровну 3 ученикам. Введите обозначения множеств карандашей и учеников. Продемонстрируйте процесс раздачи карандашей, используя символику множеств. Сколько карандашей оказалось у каждого ученика?

8. В каждый стакан надо положить по 2 куска сахара. На сколько стаканов хватит 10 кусков сахара? Изобразите решение с использованием символики множеств и их свойств.

ГЛАВА II. КВАДРАТНЫЕ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§4. Квадратные уравнения

4.1. Квадратный трёхчлен

1. Разложите на линейные множители:

а) ***Пример.*** $6x^2 - x - 1$

Решение. Корни этого квадратного трёхчлена равны $x_1 = \dfrac{1}{2}$ и $x_2 = -\dfrac{1}{3}$. Поэтому по формуле разложения квадратного трёхчлена имеем

$$6x^2 - x - 1 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{2x - 1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3x + 1}{3}\right) =$$

$$= 6\frac{(2x - 1) \cdot (3x + 1)}{6} = (2x - 1)(3x + 1).$$

б) $x^2 + x + 1$

в) $x^2 - x + 1$

г) $2x^2 - 7x + 4$

д) $x^2 - 2ax + 3a^2 - ab - b^2$

2. Решите неравенство:

а) ***Пример.*** $-x^2 + x - 1 > 0$

Решение. Дискриминант квадратного трёхчлена $-x^2 + x - 1$ отрицателен: $D = -3$. Поэтому при всех x значения функции $y = -x^2 + x - 1$ имеют один и тот же знак, а именно знак коэффициента при x^2, то есть минус. Следовательно, неравенство $-x^2 + x - 1 > 0$ не выполняется ни при каких значениях x.

б) $x^2 - 4x + 3 > 0$

в) $x^2 + x + 1 < 0$

г) $x^2 - 6x + 5 < 0$

д) $x^2 - x + 1 > 0$

е) $-5x^2 + 3x + 2 > 0$

ж) $x^2 - 6x + 10 < 0$

з) $x(1 - x) > 0$

и) $-3x^2 + 2x + 1 > 0$

3. При каких значениях a данное неравенство выполняется для всех значений x?

а) $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + (a + 1) > 0$

б) $(a - 2)x^2 + 2(2a - 3)x + 5a - 6 < 0$

4. При каких значениях a уравнение имеет действительные корни?

а) $(a - 2)x^2 - 2(4a - 4)x + 8a - 6 = 0$

б) $6(a + 4)x^2 - 12x + 2a = 0$

4.2. Понятие квадратного уравнения

5. Сколько корней имеет квадратное уравнение?

а) ***Пример.*** $x^2 - 8x + 12 = 0$

Решение. Выпишем коэффициенты для первого уравнения и найдём дискриминант: $a = 1$, $b = -8$, $c = 12$; $D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 64 - 48 = 16$. Дискриминант положительный, поэтому уравнение имеет два различных корня.

б) $5x^2 + 3x + 7 = 0$

в) $x^2 - 6x + 9 = 0$

4.3. Неполное квадратное уравнение

6. Какие из уравнений являются неполными?

а) $2x^2 + 4x - 5 = 0$ ____________

б) $-x^2 + x = 0$ ____________

в) $2x^2 + 1 = 0$ ____________

г) $3x^2 + 2x = 0$ ____________

д) $7x^2 = 0$ ____________

е) $-x^2 + 6x - 5 = 0$ ____________

7. Решите квадратное уравнение:

а) ***Пример.*** $x^2 - 7x = 0$
Решение. $x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x(x - 7) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -(-7)/1 = 7.$

б) $5x^2 + 30 = 0$

в) $4x^2 - 9 = 0$

г) $x^2 - 3x = 0$

д) $2x = -12$

е) $2x^2 - 7x = 0$

ж) $-x^2 + 5x = 0$

з) $x^2 - 16 = 0$

и) $-2x + 7 = 0$

к) $3x^2 + 10 = 0$

л) $5x^2 = 0$

4.4. Решение квадратного уравнения общего вида

8. Решите квадратное уравнение:

а) ***Пример.*** $x^2 - 2x - 3 = 0$
Решение. $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow a = 1,\ b = -2,\ c = -3,\ D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) =$
$= 16.$
$D > 0$, уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = 3;\ x_2 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -1.$$

б) $15 - 2x - x^2 = 0$

в) $x^2 + 12x + 36 = 0$

г) $7x + 5x - 3 = 0$

д) $x^2 - 4x + 8 = 0$

4.5. Приведённое квадратное уравнение

9. Какие из нижеперечисленных квадратных уравнений являются приведёнными?

а) ***Пример.*** $x^2 - 2x - 5 = 0$

Решение. Квадратное уравнение, в котором первый коэффициент (A) равен 1, называют приведённым квадратным уравнением. В данном уравнении $A = 1$, поэтому уравнение является приведённым.

б) $-x^2 - 2x + 2 = 0$ ______________________________

в) $x^2 + 3 = 0$ ______________________________

г) $-2x^2 - 4x + 1 = 0$ ______________________________

д) $x^2 + x = 0$ ______________________________

10. Найдите корни приведённых квадратных уравнений:

а) ***Пример.*** $x^2 - x - 6 = 0$

Решение. Представим уравнение в виде $-x^2 + (-1)x + (-6) = 0$. Отсюда видно, что $p = -1$ и $q = -6$. Пользуясь формулой для вычисления корней приведённых квадратных уравнений, найдем, что:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2},\ x_1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3;\ \ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2.$$

Проверка: $3^2 - 3 - 6 = 0$; $(-2)^2 - (-2) - 6 = 0$.

б) $x^2 - 2x + 5 = 0$

в) $x^2 - 18x + 121 = 0$

г) $x^2 - 4x - 16 = 0$

д) $x^2 + 12x - 4 = 0$

е) $x^2 + 8x + 12 = 0$

4.6. Теорема Виета

11. Решите приведённые квадратные уравнения с помощью теоремы Виета:

а) ***Пример.*** $x^2 - 5x + 6 = 0$

Решение. Допустим, это уравнение имеет корни x_1 и x_2. Тогда по теореме Виета одновременно должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 6, \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

Здесь произведение корней — положительное число, поэтому корни уравнения одного знака. Сумма корней также является положительным числом, следовательно, оба корня уравнения — положительные. Допустим, что корни уравнения — целые положительные числа. Тогда получить верное первое равенство можно только двумя способами (с точностью до порядка множителей): $1 \cdot 6 = 6$ или $2 \cdot 3 = 6$. Проверим для предложенных пар чисел выполнимость второго утверждения теоремы Виета: $1 + 6 \neq 5$, $2 + 3 = 5$. Таким образом, числа 2 и 3 удовлетворяют обоим равенствам, а значит, и являются корнями заданного уравнения.

б) $x^2 + 7x + 10 = 0$

в) $x^2 + 3x - 10 = 0$

г) $x^2 - 7x - 30 = 0$

д) $x^2 + x - 30 = 0$

12. Решите полное квадратное уравнение с помощью теоремы Виета:

а) $15x^2 - 11x + 2 = 0$

б) $2x^2 + 7x + 6 = 0$

в) $2012x^2 - x - 2011 = 0$

г) $12x^2 - 4x - 5 = 0$

д) $16x^2 + 2x - 3 = 0$

13. Решите уравнение:

а) $2x^2 + 5x - 1 = 0$

б) $x^3 - 5x + 6x = 0$

в) $x^2 - 3x + 2 = 0$

г) $\dfrac{7(x-1)(x-3)(x-4)}{(2x-7)(x+2)(x-6)} = -2$

14. Решите уравнение:

а) ***Пример.*** $x^6 - 5x^3 + 4 = 0$

Решение. Обозначим $y = x^3$, тогда исходное уравнение принимает вид:

$$y^2 - 5y + 4 = 0,$$

решив его, получаем $y_1 = 1$, $y_2 = 4$. Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений: $x^3 = 1$ или $x^3 = 4$, т. е. $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt[3]{4}$.

б) $\dfrac{x^3 - 27}{x - 3} = 27$

в) $x(x+2)(x+3)(x+5) = 72$

15. Разложите на множители квадратный трёхчлен $3x^2 - 10x + 3$.

16. Сократите дробь $\dfrac{2x^2+5x+2}{x^2-4x-12}$.

17. Разложите на множители выражение:

а) x^4+5x^2+6

б) $2x+\sqrt{x}-3$

4.7. Применение квадратных уравнений к решению задач

18. Решите задачи:

а) ***Пример.*** На середине пути между станциями A и B поезд был задержан на 10 минут. Чтобы прибыть в B по расписанию, машинисту пришлось первоначальную скорость поезда увеличить на 12 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда, если известно, что расстояние между станциями равно 120 км.

Решение. Пусть x км/ч — скорость поезда на первой половине пути. Тогда время, за которое поезд прошел половину пути, — $\dfrac{60}{x}$ ч. Скорость поезда на второй половине пути, — $x+12$ км/ч; время, за которое поезд прошел вторую половину пути — $\dfrac{60}{x+12}$ ч. Поскольку вторую половину пути поезд прошел на $\dfrac{1}{6}$ часа быстрее, имеем уравнение:

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+12}-\frac{1}{6}=\frac{120}{x};$$

Домножаем обе части уравнения на $6x(x+12)$:

$$\begin{cases} 360x - 4320 - 360x - 12x = 0, \\ x \neq 0,\ x \neq -12. \end{cases}$$

$$x^2 + 12x - 4320 = 0$$

$$D = 36 + 4320 = 4356$$

$$x_1 = -72,\ x_2 = 60.$$

Ответ: 60 км/ч.

б) Знаменатель дроби на 5 больше её числителя. Если к числителю прибавить 14, а от знаменателя отнять 1, то получиться дробь, обратная данной. Найдите первоначальную дробь.

в) Велосипедист должен был проехать 40 км с некоторой скоростью, но, увеличив эту скорость на 6 км/ч, он проехал 40 км на 20 минут быстрее. Найдите истинную скорость велосипедиста.

г) Из города A в город B, расстояние между которыми 30 км, выехал грузовой автомобиль, а через 10 минут вслед за ним отправился легковой автомобиль, скорость которого на 20 км/ч больше скорости грузового. Найдите скорость легкового автомобиля, если известно, что он приехал в город B на 5 минут раньше грузового автомобиля.

д) Найдите два последовательных натуральных числа, произведение которых равно 210.

е) Площадь прямоугольника, одна из сторон которого на 3 см больше другой, равна 54 см^2. Найдите стороны и периметр прямоугольника.

ж) Периметр прямоугольника равен 34 см, а его диагональ 13 см. Найдите стороны прямоугольника.

з) Две токаря, работая вместе, могут выполнить задание за 3 часа. Сколько времени потребуется для выполнения этого задания первому токарю, если он может выполнить все задание на 8 часов быстрее второго?

и) Скорость моторной лодки в стоячей воде 7 км/ч. Время, затраченное на движение лодки на 24 км по течению и на 24 км против течения, равно 7 часам. Найдите скорость течения реки.

§5. Рациональные уравнения

5.1. Понятие рационального уравнения

1. Решите уравнение:

а) ***Пример.*** $2x - 3 + 4(x - 1) = 5$

Решение. Последовательно раскроем скобки, приведём подобные члены и найдём x:

$$2x - 3 + 4x - 4 = 5,$$
$$2x + 4x = 5 + 4 + 3,$$
$$6x = 12,\ x = 2.$$

Ответ: 2.

б) $2x - 3 + 2(x - 1) = 4(x - 1) - 7$

в) $2x + 3 - 6(x - 1) = 4(x - 1) + 5$

2. Решите уравнение:

а) ***Пример.*** $\dfrac{2x}{x-3} + \dfrac{11}{2} = \dfrac{3}{x}$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{11}{2} - \frac{3}{x} = 0,$$

т.е. перенесём член $\dfrac{3}{x}$ в левую часть уравнения с противоположным знаком. Выполним преобразования левой части уравнения. Имеем:

$$\frac{4x^2 + 11x^2 + 33x - 6x + 18}{2x(x-3)} = \frac{15x^2 - 39x + 18}{2x(x-3)} = \frac{3(5x^2 - 13x + 6)}{2x(x-3)}.$$

По условиям равенства дроби нулю $\dfrac{a}{b} = 0$ тогда, и только тогда, когда одновременно выполняются два соотношения: 1) числитель дроби равен нулю ($a = 0$); 2) знаменатель дроби отличен от нуля $b \neq 0$). Приравняв нулю числитель дроби в левой части уравнения, получим

$$3(5x^2 - 13x + 6) = 0,$$

$$5x^2 - 13x + 6 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 5 \cdot 6}}{2 \cdot 5} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{10} = \frac{13 \pm 7}{10};$$

$$x_1 = \frac{13+7}{10} = 2; \quad x_2 = \frac{13-7}{10} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Соотношение $b \neq 0$ означает, что $2x(x - 3) \neq 0$, т.е. $x \neq 0$, $x \neq 3$. Значения $x_1 = 2$ и $x_2 = 0,6$ указанным соотношениям удовлетворяют и потому служат корнями исходного преобразованного уравнения, а вместе с тем и корнями заданного уравнения.

Ответ: 2; 0,6.

б) $\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2x - x^2}$.

3. Докажите тождество:

$$\left(\frac{2a}{2a+b} - \frac{4a^2}{4a^2 + 4ab + b^2}\right) : \left(\frac{2a}{4a^2 - b^2} + \frac{1}{b - 2a}\right) + \frac{8a^2}{2a+b} = 2a.$$

4. Решите задачи при помощи рациональных уравнений:

а) ***Пример.*** Перегон в 60 км поезд должен был проехать с постоянной скоростью за определённое расписанием время. Простояв у семафора перед перегоном 5 мин, машинист вынужден был увеличить скорость прохождения перегона на 10 км/ч, чтобы наверстать к окончанию прохождения перегона потерянные 5 мин. С какой скоростью поезд должен был пройти перегон по расписанию?

Решение. Пусть x км/ч — скорость поезда по расписанию. Так как протяжённость перегона равна 60 км, то время, отведённое расписанием на прохождение перегона, составляет $\frac{60}{x}$ ч. Фактически поезд прошёл перегон в 60 км со скоростью $x + 10$ км/ч, значит, время, затраченное на прохождение перегона, равно $\frac{60}{x+10}$ ч. Из двух величин — $\frac{60}{x}$ ч и $\frac{60}{x+10}$ ч первая больше второй на 5 мин, т. е. на $\frac{1}{12}$ ч. Значит, мы приходим к рациональному уравнению:

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}=\frac{1}{12}.$$

Имеем:

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}-\frac{1}{12}=0.$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\frac{720(x+10)-720x-x(x+10)}{12x(x+10)}=\frac{-x^2-10x+7200}{12x(x+10)}.$$

Приравняв числитель этой дроби к нулю, получим квадратное уравнение $-x^2 - 10x + 7200 = 0$ или, переходя к более удобной записи, $x^2 + 10x - 7200 = 0$. Применяя известную формулу, находим

$$x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{102+4\cdot1\cdot(-7200)}}{2}=\frac{-10\pm\sqrt{28900}}{2}=\frac{-10\pm170}{2};$$

$$x_1=\frac{-10+170}{2}=80;\ \ x_2=\frac{-10-170}{2}=-90.$$

Оба значения удовлетворяют условию $12x + 10 \neq 0$, следовательно, эти значения — корни составленного рационального уравнения. Выбираем число, подходящее по условию задачи, поскольку скорость отрицательной быть не может.

Ответ: 80 км/ч.

б) Пристани A и B расположены на реке, причем B — на 80 км ниже по течению, чем A. Катер прошёл путь из A в B и обратно за 8 ч 20 мин. За какое время катер прошел расстояние от A до B и расстояние от B

до A, если известно, что его собственная скорость (скорость в стоячей воде) равна 20 км/ч?

в) Периметр прямоугольного треугольника равен 48 см, один его катет на 4 см больше другого. Чему равны стороны этого треугольника?

г) Для вывоза со склада 80 т груза автокомбинату было заказано некоторое количество машин одинаковой грузоподъёмности. Руководство комбината решило, что на каждую машину можно грузить на 1 т груза больше, чем планировали на складе, и прислало на 4 машины меньше, чем было заказано. Весь груз в итоге был вывезен. Сколько машин было заказано, и сколько прислал автокомбинат?

д) В райцентре два кинотеатра — на 400 и на 600 мест. В зрительном зале первого кинотеатра на 4 ряда больше, чем в зрительном зале второго кинотеатра, и в каждом ряду на 5 мест больше, чем во втором кинотеатре. Сколько рядов в зрительном зале второго кинотеатра, если известно, что в каждом ряду первого кинотеатра более 25 мест?

е) Задумано двузначное число. Известно, что сумма квадратов цифр задуманного числа равна 58. Если цифры задуманного числа поменять местами, то получится двузначное число, которое больше задуманного на 36. Какое число задумано?

5.2. Биквадратное уравнение

5. Решите уравнения:

а) ***Пример.*** $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

Решение. Приведём уравнение к квадратному, введя вспомогательное неизвестное y, такое, что $y = x^2$. Тогда $x^4 = y^2$. Теперь данное биквадратное уравнение приводится к виду:

$$4y^2 - 5y + 1 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получим $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{4}$. Так как $y = x^2$, то данное биквадратное уравнение эквивалентно системе двух уравнений:

$$\begin{cases} x^2 = y_1, \\ x^2 = y_2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 = 1, \\ x^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Решим каждое из этих уравнений и найдём объединение множеств их решений. Получим:

$$x_2 = 1, \text{ откуда } x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_2 = \frac{1}{4}, \text{ откуда } x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = -\frac{1}{2}.$$

б) $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

в) $x^4 + 4x^2 - 21 = 0$

г) $2x^4 - 5x + 2 = 0$

д) $x^4 + x^2 - 20 = 0$

е) $\dfrac{1}{x^2 + 3x - 3} + \dfrac{2}{x^2 - 3x + 1} = \dfrac{7}{5}$

ж) $x(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 24$

5.3. Распадающееся уравнение

6. Решите уравнение:

а) ***Пример.*** $(x^2 - 3x - 4)(x^2 + x - 2) = 0$

Решение. Поскольку произведение из двух чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, хотя бы одно из числовых равенств $x^2 - 3x + 4 = 0$ и $x^2 + x - 2 = 0$ должно выполняться. Поэтому число x будет являться корнем хотя бы одного из уравнений:

$$x^2 - 3x + 4 = 0,$$
$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Также любой корень каждого из двух уравнений будет корнем изначального уравнения. Уравнение $x^2 - 3x - 4 = 0$ имеет два корня: $x_1 = 4$

и $x_2 = -1$. Уравнение $x^2 + x - 2 = 0$ имеет два корня $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$. Следовательно, уравнение $(x^2 - 3x - 4)(x^2 + x - 2) = 0$ имеет следующие корни: $x_1 = 4$, $x_2 = -1$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ и других корней не имеет.

б) $(4x^2 - 3x + 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$

5.4. Уравнение, одна часть которого алгебраическая дробь, а другая — нуль

7. Решите уравнение:

а) ***Пример.*** $\dfrac{x-1}{2x^2+5x^2-6x} = 0$

Решение. Приравняв числитель к нулю, получим $x - 1 = 0$, т. е. $x = 1$. Теперь подставим значение $x = 1$ в знаменатель. Получим нуль, а на нуль делить нельзя. Это значит, что $x = 1$ не является корнем уравнения, т. е. заданное уравнение вообще не имеет корней.

б) $\dfrac{m^3 - m}{7} = 0$

в) $\dfrac{2x^2 - 4x}{-5} = 0$

г) $\dfrac{x^2 - 8x}{5} = 0$

д) $\dfrac{x^3 - 125x}{15} = 0$

е) $\dfrac{x^4 - 625}{4} = 0$

ж) $\dfrac{x^3 - 9x}{9} = 0$

з) $\dfrac{x - 1}{2x^3 + 5x - 6x - 1} = 0$

5.5. Решение рациональных уравнений

8. Решите уравнение:

а) ***Пример.*** $\dfrac{2x}{x-3} + \dfrac{11}{2} = \dfrac{3}{x}$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{11}{2} - \frac{3}{x} = 0.$$

Поскольку равенства $A = B$ и $A - B = 0$ выражают одну и ту же зависимость между A и B, можно перенести член $\frac{3}{x}$ в левую часть уравнения с противоположным знаком. Выполним преобразования левой части уравнения:

$$\frac{2x}{x-3}+\frac{11}{2}-\frac{3}{x}=\frac{2x\cdot 2x+11x(x-3)-3\cdot 2\cdot (x-3)}{2x(x-3)}=$$

$$=\frac{4x^2-11x^2-33x-6x+18}{2x(x-3)}=$$

$$=\frac{15x^2-39x+18}{2x(x-3)}=\frac{3(5x^2-13x+6)}{2x(x-3)}.$$

Итак,

$$\frac{3(5x^2-13x+6)}{2x(x-3)}=0.$$

По условию равенства дроби нулю $\frac{a}{b}=0$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два соотношения: 1) числитель дроби равен нулю ($a = 0$); 2) знаменатель дроби отличен от нуля ($b \neq 0$). Приравняв нулю числитель дроби в левой части последнего уравнения, получим

$$3(5x^2 - 13x + 6) = 0,$$

$$5x^2 - 13x + 6 = 0,$$

$$x_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{13^2-4\cdot 5\cdot 6}}{2\cdot 5}=\frac{13\pm\sqrt{169-120}}{10}=\frac{3\pm 7}{10}.$$

$$x_1=\frac{13+7}{10}=2;\;\; x_2=\frac{13-7}{10}=\frac{3}{5}=0,6.$$

Проверим выполнение второго указанного выше условия. Соотношение $b \neq 0$ означает, что $2x(x - 3) \neq 0$, так как $x \neq 0$, $x \neq 3$. Значения $x_1 = 2$ и $x_2 = 0,6$ указанным соотношениям удовлетворяют и потому служат корнями уравнения-числителя, а вместе с тем и корнями заданного уравнения.

Ответ: 2; 0,6.

б) $\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2x-x^2}$

в) $x^4 - x^2 - 20 = 0$

г) $\frac{1}{x^2+3x-3} + \frac{2}{x^2+3x+1} = \frac{7}{5}$

5.5. Решение задач при помощи рациональных уравнений

9. ***Пример.*** Сплав серебра и меди, содержащий 5 кг меди, сплавили с 15 кг серебра, после чего процентное содержание меди в сплаве повысилось на 30%. Какова первоначальная масса сплава, если известно, что меди в нём было больше, чем серебра?

Решение. Пусть x кг меди было в сплаве, тогда $(x + 5)$ кг — масса первоначального сплава, $\frac{5}{x+5} \cdot 100$ — первоначальное процентное содержание меди; $\frac{20}{x+20} \cdot 100$ — процентное содержание серебра в полученном сплаве.

Согласно условию,

$$\frac{20}{x+20} \cdot 100 - \frac{5}{x+5} \cdot 100 = 30.$$

Решив полученное уравнение, находим $x_1 = 20$, $x_2 = 5$. Оба корня удовлетворяют составленному уравнению. По условию в первоначальном сплаве было 5 кг серебра, а меди — больше, чем серебра. Поэтому из найденных значений выбираем значение 20, тогда масса сплава — 25 кг.

Ответ: 25 кг.

10. Первая бригада может выполнить некоторую работу на 10 дней быстрее, чем вторая, а работая вместе, они могли бы выполнить ту же работу за 12 дней. За сколько дней каждая бригада могла бы выполнить ту же работу?

11. Катер прошёл 108 км по течению реки и 84 км против течения, затратив на весь путь 8 ч. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки 3 км/ч.

12. Из одного города в другой, находящийся от него на расстоянии 120 км, выехали одновременно два мотоциклиста. Скорость одного была на 20 км/ч больше скорости другого, и поэтому он пришел к месту назначения на 1 ч раньше. Найдите скорость каждого мотоциклиста.

13. Моторная лодка прошла 56 км против течения реки и 32 км по течению, затратив на весь путь 3 ч. Найдите собственную скорость лодки, обозначив её через x км/ч, при условии, что скорость течения реки равна 1 км/ч.

14. Один из лыжников прошёл расстояние в 20 км на 20 мин быстрее, чем другой. Найдите скорость каждого лыжника, зная, что один из них двигался со скоростью, на 2 км/ч большей.

15. Из-за десятиминутной задержки поезда в пути ему пришлось на перегоне в 80 км увеличить скорость на 5 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.

16. Два автомобиля выезжают одновременно из одного города в другой. Скорость первого на 10 км/ч больше скорости второго и поэтому он приезжает на место на 1 ч раньше второго. Найдите скорость каждого автомобиля, зная, что расстояние между городами равно 560 км.

17. Чтобы ликвидировать опоздание на 1 ч, поезд на перегоне в 780 км увеличил скорость, с которой должен был идти по расписанию, на 10 км/ч. Какова скорость поезда по расписанию?

18. Первый пешеход может пройти расстояние между двумя пунктами на 5 часов быстрее, чем второй. Если пешеходы выйдут из этих пунктов одновременно навстречу друг другу, то встретятся через 6 часов. За сколько часов каждый из них может пройти это расстояние?

19. Скорый поезд, идущий со скоростью 90 км/ч, проходит расстояние между городами на 1,5 ч быстрее товарного, который идет со скоростью 60 км/ч. Каково расстояние между городами?

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

1. Разложение многочленов на множители и решение уравнений

1. Решите уравнение:

а) ***Пример.*** $30x^4 + x^3 - 30x^2 + 3x + 4 = 0$

Решение:

Составим различные несократимые дроби, числители которых — делители свободного члена, т.е. 4, а знаменатели — делители старшего коэффициента, т.е. 30.

Делители свободного члена 4:

$\pm1; \pm2; \pm4$

Из них получается только одна несократимая дробь:

$$\pm\frac{1}{2}$$

Делители старшего коэффициента:

$\pm2; \pm3; \pm5; \pm6; \pm10; \pm15; \pm30$

Из них составляем несократимые дроби:

$$\pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{2}{3};\ \pm\frac{4}{3}$$

$$\pm\frac{1}{5};\ \pm\frac{2}{5};\ \pm\frac{4}{5}$$

$$\pm\frac{1}{6}$$

$$\pm\frac{1}{10}$$

$$\pm\frac{1}{15};\ \pm\frac{2}{15};\ \pm\frac{4}{15}$$

$$\pm\frac{1}{30}$$

Вернёмся к уравнению. Видно, что -1 — корень многочлена. По следствию из теоремы Безу делим многочлен на $x + 1$:

$$\begin{array}{l|l}
30x^4 + x^3 - 30x^2 + 3x + 4 & x + 1 \\
\underline{30x^4 + 30x^3} & \overline{30x^3 - 29x^2 - x + 4} \\
\qquad -29x^3 - 30x^2 & \\
\qquad \underline{-29x^3 - 29x^2} & \\
\qquad\qquad\qquad -x^2 + 3x & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-x^2 - x} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 4x + 4 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{4x + 4} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Для поиска корней многочлена $30x^3 - 29x^2 - x + 4$ воспользуемся таблицей дробей. При $x = \frac{1}{2}$ многочлен примет вид $\frac{15}{4} - \frac{29}{4} - \frac{1}{2} + 4 = 0$. Значит, $\frac{1}{2}$ — корень многочлена.

$$
\begin{array}{r|l}
30x^3 - 29x^2 - x + 4 & x - 0{,}5 \\ \cline{2-2}
\underline{30x^2 - 15x^2} \qquad\qquad\quad & 30x^2 - 14x - 8 \\
-14x^2 - x \qquad\; & \\
\underline{-14x^2 + 7x} \qquad\; & \\
-8x + 4 & \\
\underline{-8x + 4} & \\
0 &
\end{array}
$$

б) $x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 11x - 2 = 0$

2. Найдите остаток от деления многочлена $x^3 - 3x^2 + 6x - 5$ на двучлен $x - 2$.

3. При каком значении a многочлен $x^4 + ax^3 + 3x^2 - 4x - 4$ делится без остатка на двучлен $x - 2$?

4. При каких значениях a и b многочлен $ax^3 + bx^2 - 73x + 102$ делится на трёхчлен $x^2 - 5x + 6$ без остатка?

5. Разложите на множители многочлены:

а) $x^4 + 4x^2 - 5 =$

б) $x^4 + 324 =$

6. Составьте кубический многочлен, имеющий корень 4 кратности 2 и корень -2.

7. Решите уравнение:

а) $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$

б) $6x^3 + 11x^2 - 3x - 2 = 0$

в) $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$

г) $x^6 + x^5 - 7x^4 - 5x^3 + 16x^2 - 6x - 12 = 0$

2. Комплексные числа

8. Вычислите:

1) ***Пример.*** $i^3 = (i)^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$

2) $i^4 =$ ______________________________

3) $3(2 + i) =$ ______________________________

4) $(1 + i)^2 =$ ______________________________

5) $(1 - i)^2 =$ ______________________________

6) $i^5 =$ ______

7) $(1 + \sqrt{3}i)^2 =$ ______

8) $(2 - 3i)(2 + 3i) =$ ______

9) $(1 + \sqrt{3})^3 =$ ______

10) $(\sqrt{3} + i)^3 =$ ______

11) $(-i)^2 =$ ______

12) $(7 - i)(2 + 3i) =$ ______

13) $(1 + i)(1 - i) =$ ______

14) $(2 - 3i)(3 + 2i) =$ ______

15) $(3 + 4i)(3 - 4i) =$ ______

16) $(1 + i)(\sqrt{3} + i) =$ ______

17) $(1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) =$ ______

18) $(\sqrt{3} - i)^3 =$ ______

19) $(1 - \sqrt{3}i)^6 =$ ______

20) $(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) =$ ______

21) $(\cos 30° + i\sin 30°)^3 =$ ______

22) $-1 + \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i =$ ______

23) $(1 + i)^2 =$ ______

24) $(1 + i)^{10} =$ ______

9. Найдите комплексное число z, такое, что

а) $z(1 + i) = 1$

б) $z(2 + i) = 1 - i$

в) $z(2 + 3i) = 3 - 2i$

г) $z(1 + i) = 3 + 4i$

10. Найдите два комплексных числа, сумма и произведение которых равны 2.

11. Найдите сумму $1 + i + i^2 + \ldots + i^{100}$.

12. Чему равны частичные суммы?

а) $1 + i + i^2 =$ ____________________

б) $1 + i + i^2 + i^3 =$ ____________________

в) $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 =$ ____________________

13. Вычислите:

а) $(1 + i\sqrt{3})^3 =$

б) $(1 - i\sqrt{2})^3 =$

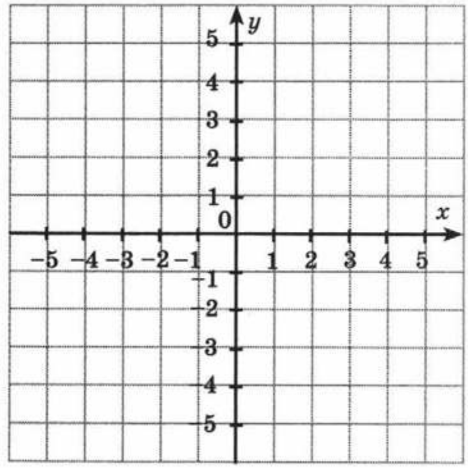
14. Найдите все $z = a + bi$, для которых верно равенство $z^3 = 1$.

15. Найдите число z, отличное от 2 и -2, такое, что $z^4 = 16$.

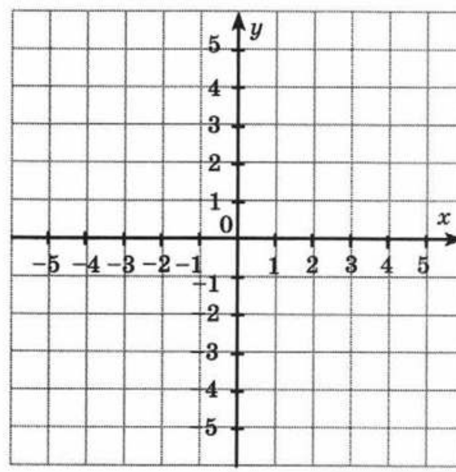
16. Найдите число, отличное от -2, куб которого равен -8.

17. **Отметьте на комплексной плоскости все числа $z = a + bi$, квадрат которых равен**

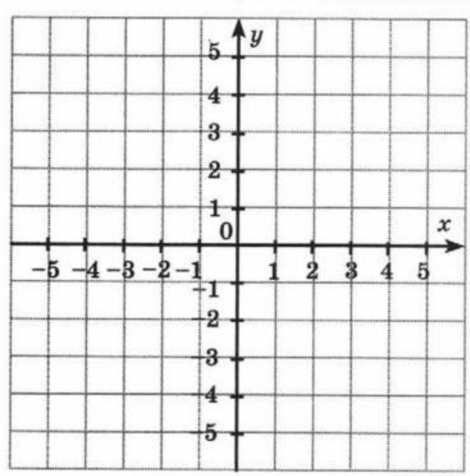
а) чисто мнимому числу;



б) действительному числу;



в) действительному положительному числу.



18. Найдите целые a и b такие, что

а) $(1 + \sqrt{2})^3 = a + b\sqrt{2}$

б) $(1 - \sqrt{2})^3 = a + b\sqrt{2}$

в) $(1 + 2i)^3 = a + bi$

г) $(1 - 2i)^3 = a + bi$

19. Число a — целое. Найдите его, если имеет место:

а) $a = (1 + \sqrt{3})^3 + (1 - \sqrt{3})^3$

б) $a = (1 + \sqrt{3}i)^3 + (1 - \sqrt{3}i)^3$

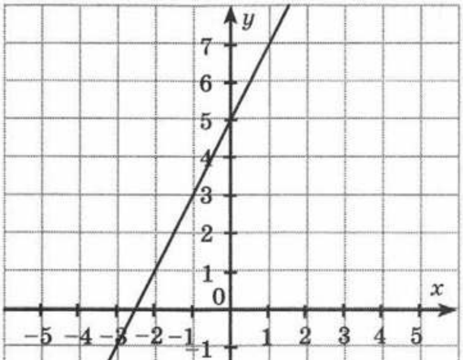
ГЛАВА III. ФУНКЦИИ $y = kx + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \dfrac{k}{x - x_0} + y_0$

§6. Линейная функция

6.1–6.3. Прямая пропорциональность. График функции $y = kx$. Линейная функция и её график

1. ***Пример.*** Постройте график функции $y = 2x + 5$.

Решение. При $x = 0$ значение функции $y = 2x + 5$ равно 5, т. е. точка (0; 5) принадлежит графику. Если $x = 1$, то $y = 2 \cdot 1 + 5 = 7$, т. е. точка (1; 7) также принадлежит графику. Построим точки (0; 5) и (1; 7) и проведём через них прямую. Эта прямая и является графиком функции $y = 2x + 5$.

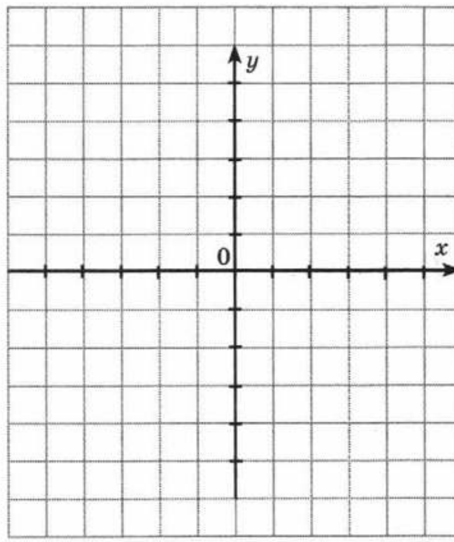


Заметим, что каждая точка графика функции $y = 2x + 5$ имеет ординату, на 5 единиц большую, чем точка графика функции $y = 2x$ с той же абсциссой. Это означает, что каждая точка графика функции $y = 2x + 5$ получается сдвигом на 5 единиц вверх вдоль оси ординат соответствующей точки графика функции $y = 2x$. Таким образом, график функции $y = kx + b$ получается сдвигом графика функции $y = kx$

на b единиц вдоль оси ординат. Графиками функций $y = kx$ и $y = kx + b$ являются параллельные прямые. Для построения графика линейной функции иногда удобно находить точки пересечения этого графика с осями координат.

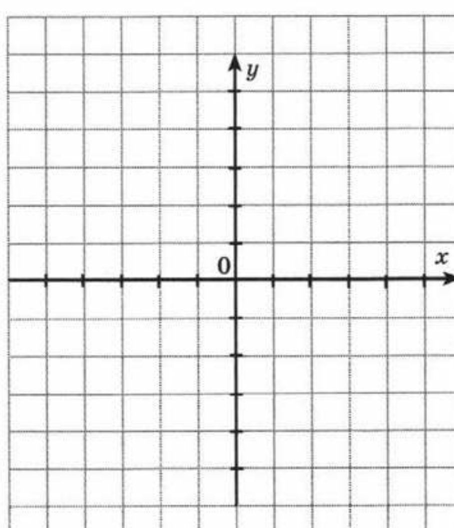
2. Найдите точки пересечения графика функции $y = -2x + 4$ с осями координат и постройте график.

x	y



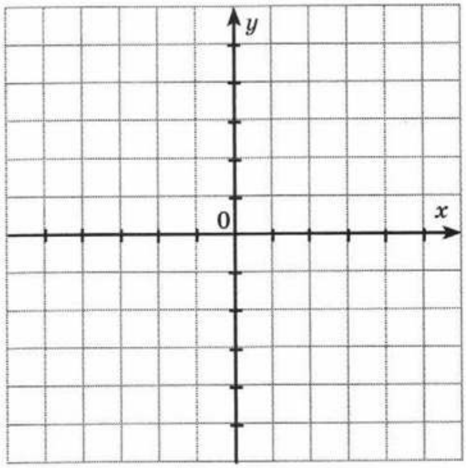
3. Постройте график линейной функции $y = kx + b$ при $k = 0$, $b = 2$.

x	y



4. Постройте график линейной функции $y = 2x - 6$.

x	y



С помощью графика ответьте на следующие вопросы:

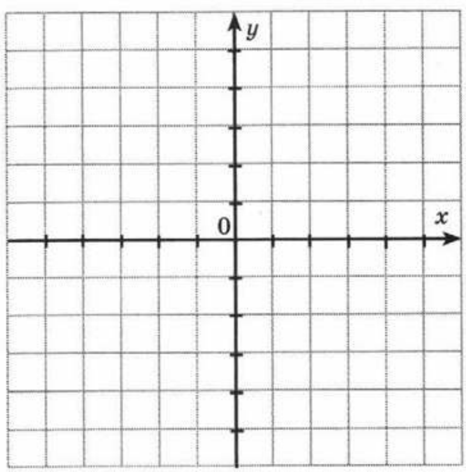
а) при каком значении x будет $y = 0$? ______________________

б) при каких значениях x будет $y > 0$? ______________________

в) при каких значениях x будет $y < 0$? ______________________

5. Постройте график линейной функции $y = -2x + 1$ и найдите её наибольшее и наименьшее значения:

x	y



а) на отрезке $[-3; 2]$: $y_{\text{макс.}} =$ ______________________

$y_{\text{мин.}} =$ ______________________

б) на интервале $(-3; 2)$: $y_{\text{макс.}} =$ ______________________

$y_{\text{мин.}} =$ ______________________

в) на полуинтервале [−3; 2): $y_{\text{макс.}}$ = ______________________

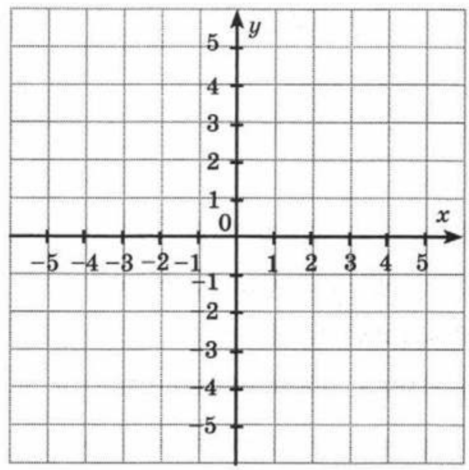
$y_{\text{мин.}}$ = ______________________

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения линейных функций:

а) $y = \frac{x}{2} + 4$ на отрезке [0; 6]: $y_{\text{макс.}}$ = ______________________

$y_{\text{мин.}}$ = ______________________

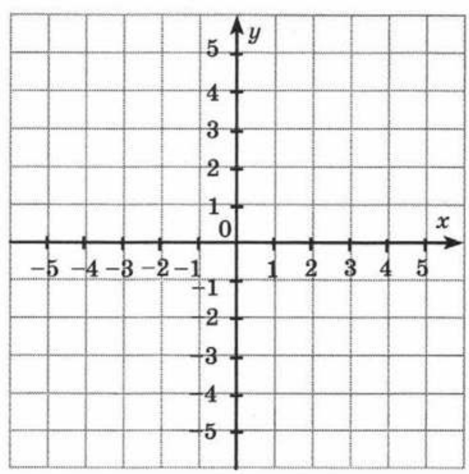
x	y



б) $y = -1{,}5x + 3{,}5$ на отрезке [1; 5]: $y_{\text{макс.}}$ = ______________________

$y_{\text{мин.}}$ = ______________________

x	y



в) $y = -1{,}5x + 3{,}5$ на интервале (1; 5): $y_{\text{макс.}}$ = ______________________

$y_{\text{мин.}}$ = ______________________

г) $y = -1{,}5x + 3{,}5$ на полуинтервале [1; 5]: $y_{\text{макс.}} =$ ____________

$y_{\text{мин.}} =$ ____________

д) $y = -1{,}5x + 3{,}5$ на луче $[0; +\infty)$: $y_{\text{макс.}} =$ ____________

$y_{\text{мин.}} =$ ____________

е) $y = -1{,}5x + 3{,}5$ на луче $(-\infty; 3]$: $y_{\text{макс.}} =$ ____________

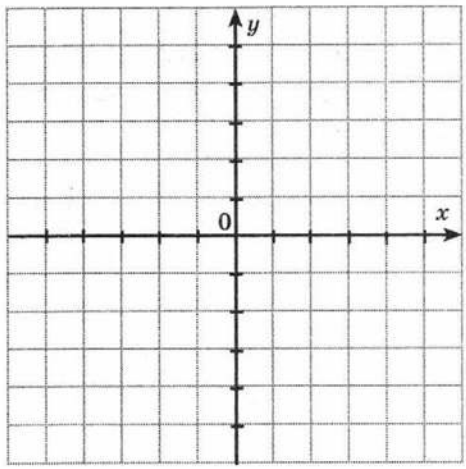
$y_{\text{мин.}} =$ ____________

6.4. Равномерное движение

7. Постройте график функции, заданный формулой:

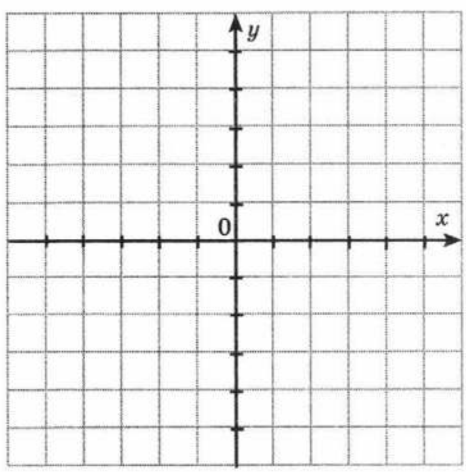
а) $y = 3 + 0{,}5x$

x	y



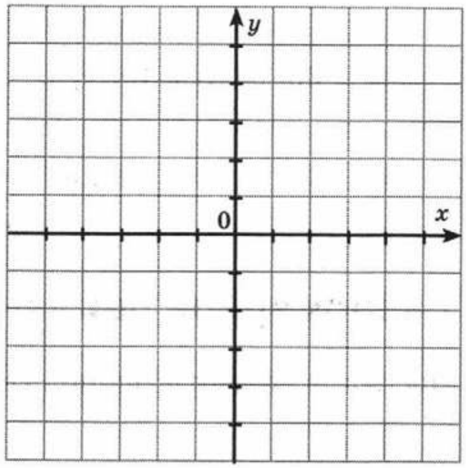
б) $y = -2x$

x	y



в) $y = 4$

x	y



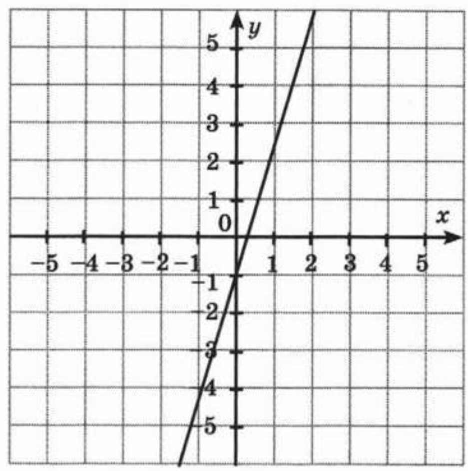
8. По графику функции запишите формулу, которой задаётся эта функция:

а) ______________________________

____

____

____

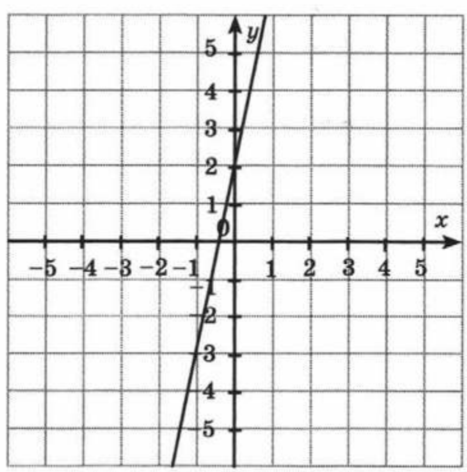


б) ______________________________

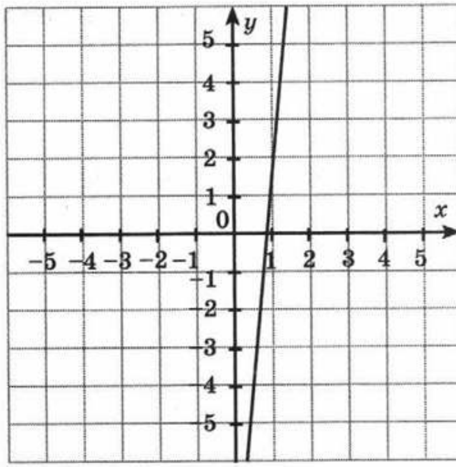
____

____

____



в)



9. Проекция скорости движущегося тела изменяется по закону $v_x = 15 - 5t$.

а) Опишите характер движения тела:

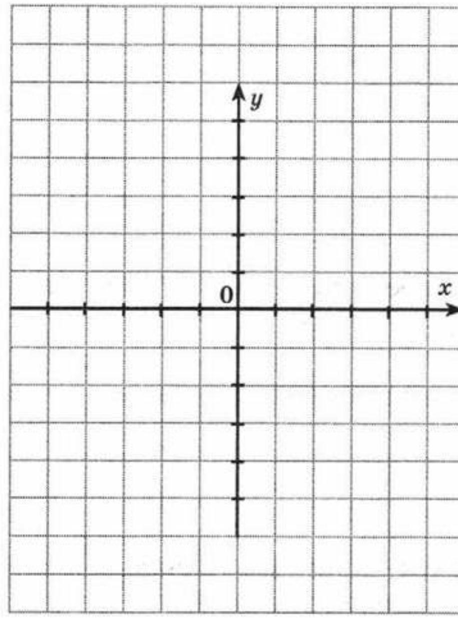
б) Найдите проекцию начальной скорости, модуль и направление вектора начальной скорости:

в) Найдите проекцию ускорения, модуль и направление вектора ускорения. Как направлен вектор ускорения по отношению к вектору начальной скорости?

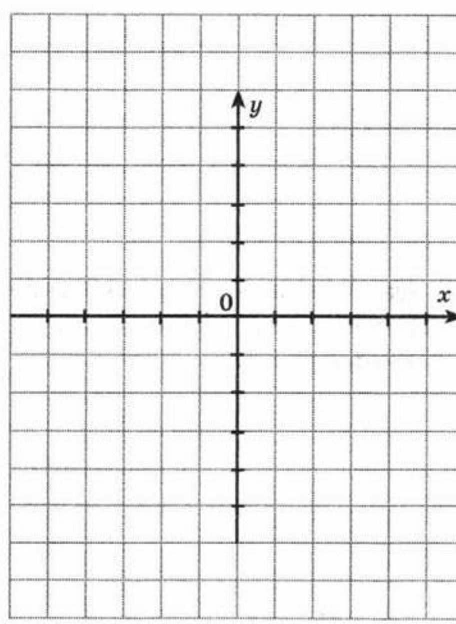
г) Напишите уравнение зависимости проекции ускорения от времени.

д) Постройте графики зависимостей $v_x(t)$ и $a_x(t)$, положив сначала $v = y$, $t = x$, а затем $a = y$, $t = x$.

x	y

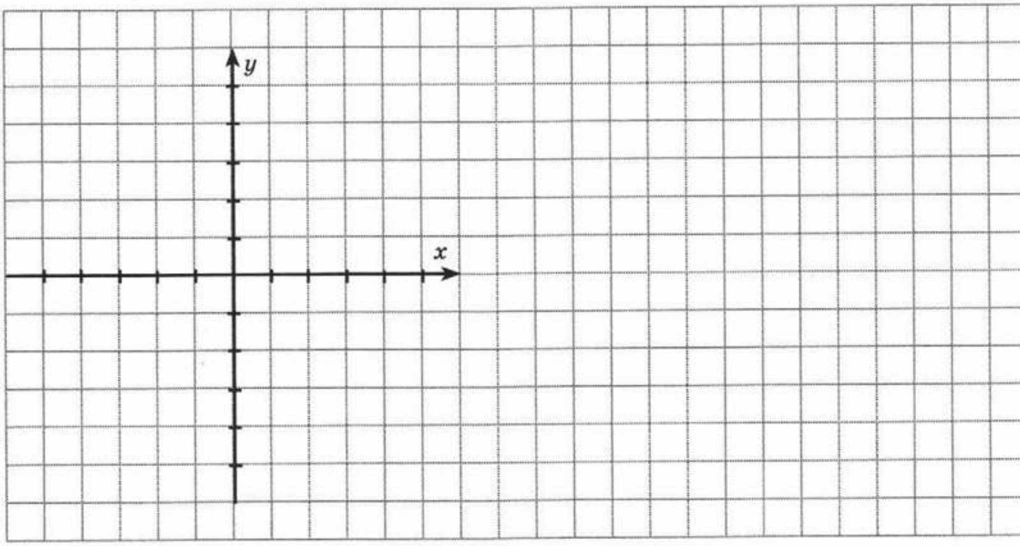


x	y

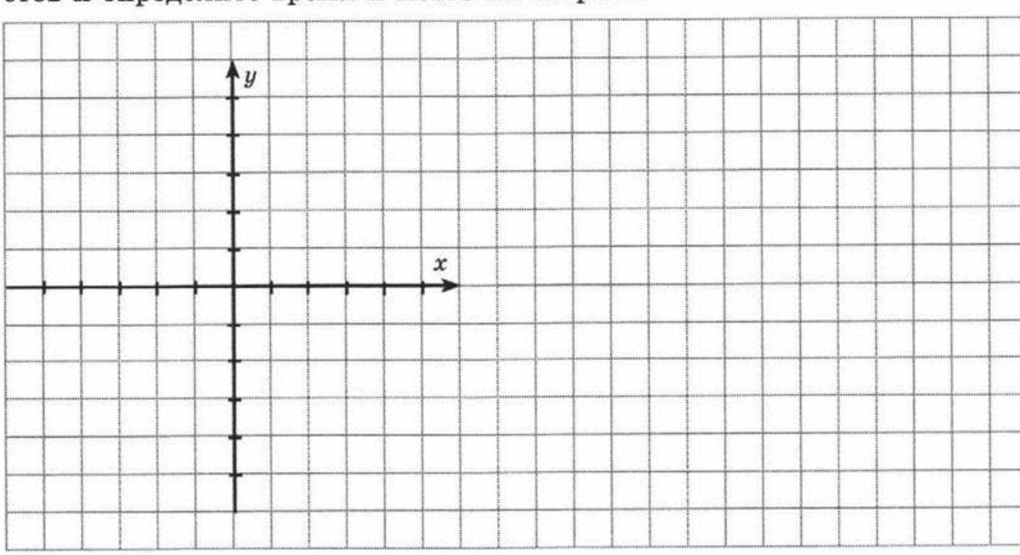


10. Решите задачи графически:

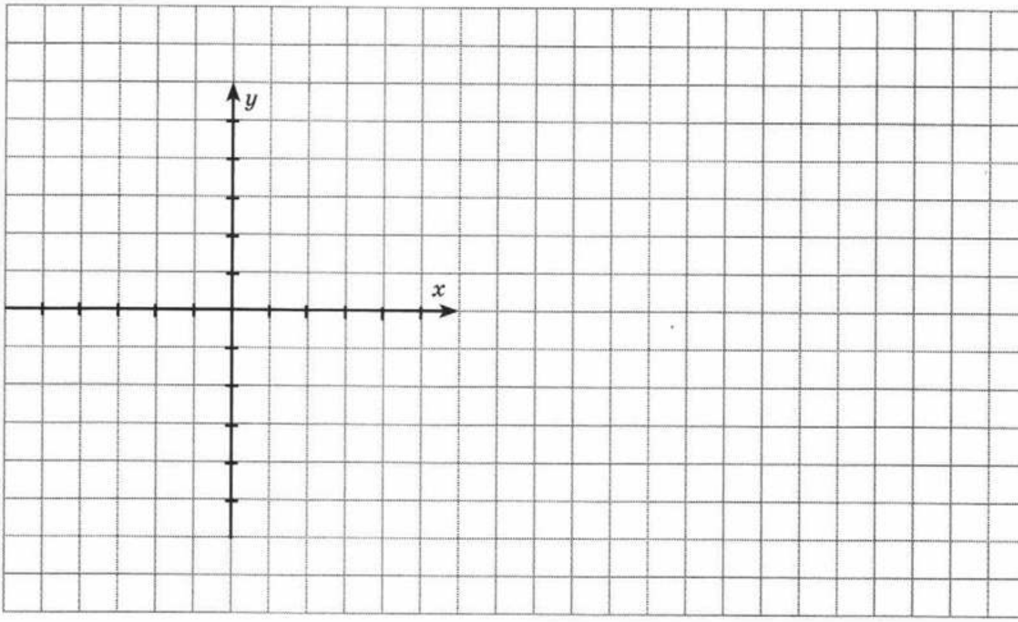
а) Два велосипедиста стартуют одновременно на дистанции 1 км. Скорость первого велосипедиста равна 8 м/с, а второго 10 м/с. На каком расстоянии от финиша находится первый велосипедист в момент финиша второго велосипедиста?



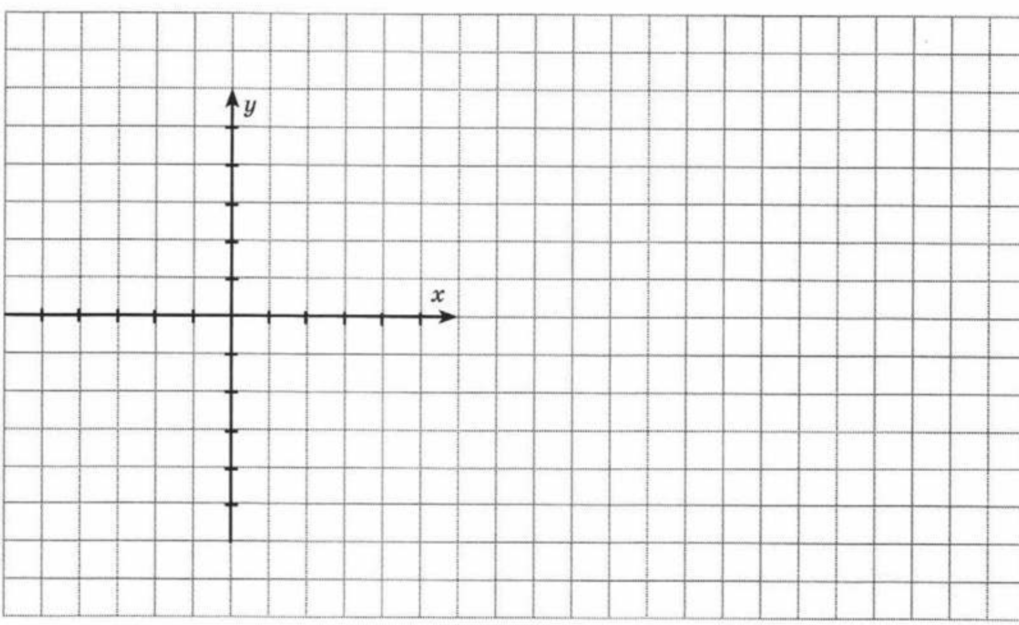
б) По прямому шоссе в одном направлении движутся два мотоциклиста. Скорость первого 10 м/с, второй догоняет его со скоростью 20 м/с. Расстояние между мотоциклистами в начальный момент времени равно 200 м. Напишите уравнения движения $x = x(t)$ мотоциклистов и определите время и место их встречи.



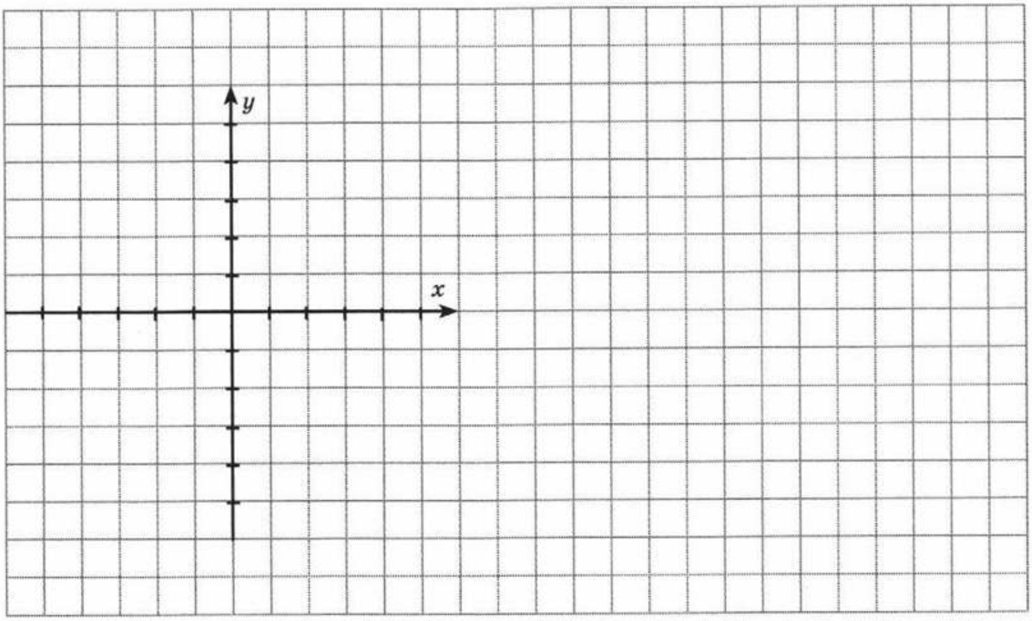
в) Поезд длиной 250 м, двигаясь равномерно, прошел мост за 1 мин. Какова скорость поезда, если длина моста 350 м?



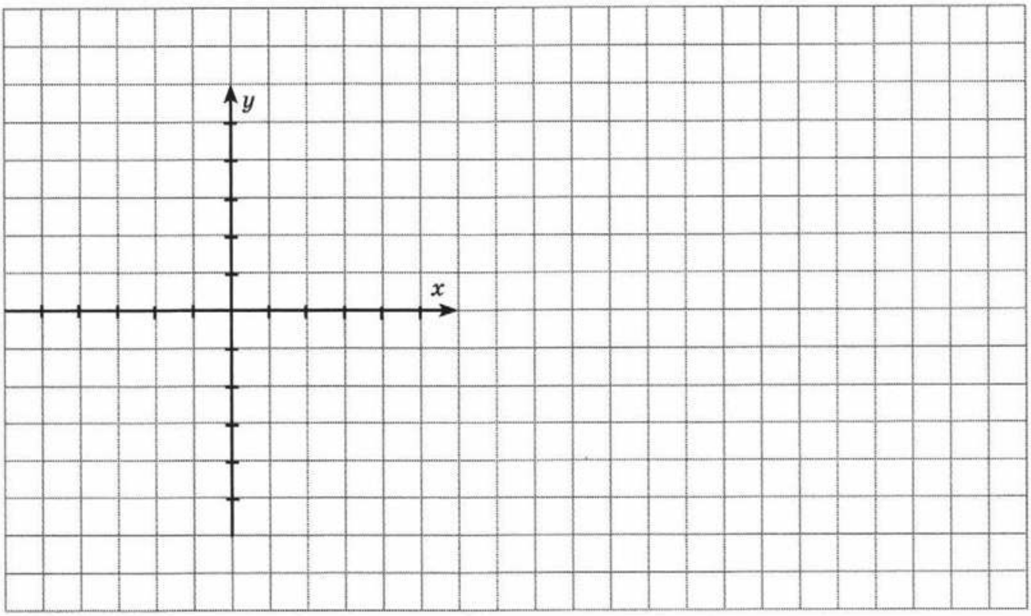
г) Из пунктов А и В, расстояние между которыми 120 км, навстречу друг другу выехали два автобуса. Первый двигался со скоростью 40 км/ч, а второй со скоростью 60 км/ч. Определите место и время встречи автобусов.



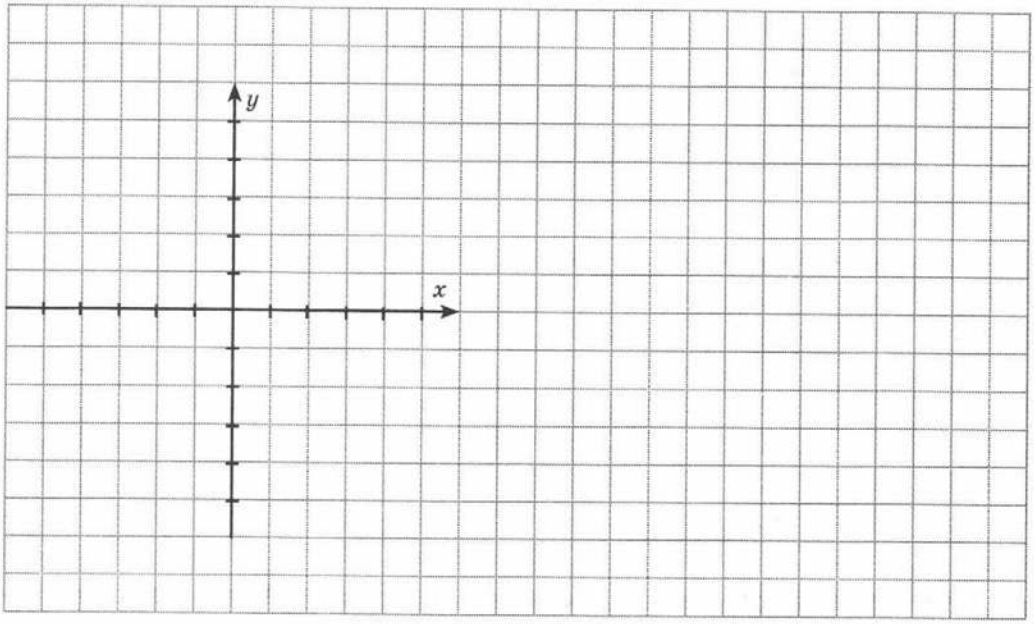
д) Состав длиной 1 км входит в туннель длиной 2 км. Определите время, в течение которого какая-либо часть поезда будет находиться в туннеле, если скорость поезда равна 36 км/ч.



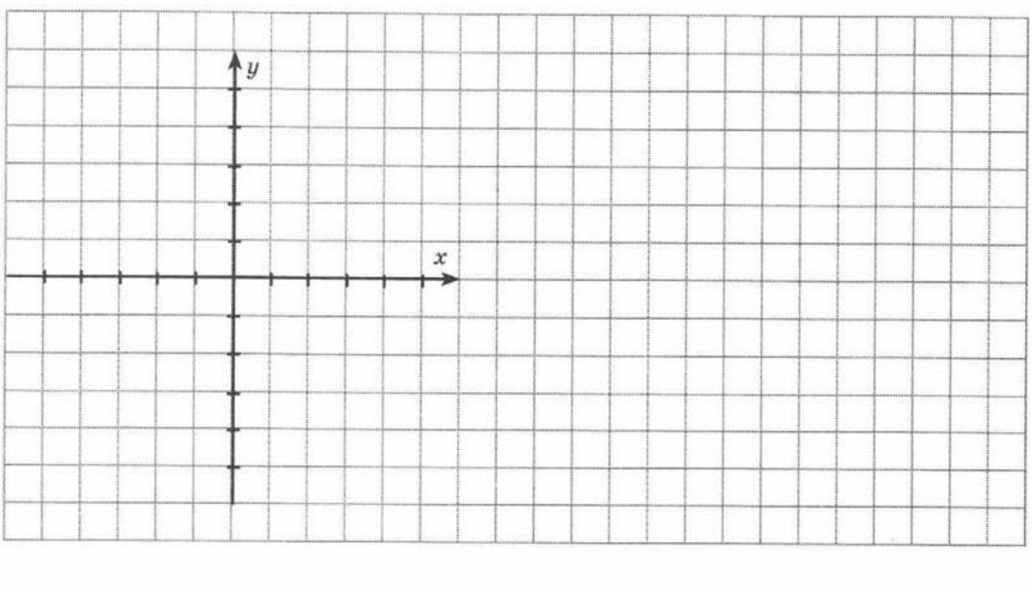
е) Расстояние между двумя городами A и B равно 405 км. Одновременно из обоих городов навстречу друг другу выезжают два автомобиля со скоростями, соответственно, 72 км/ч и 90 км/ч. Напишите уравнения движения автомобилей $x = x(t)$ и определите место и время их встречи.



ж) Человек стреляет из пистолета по мишени, находящейся от него на расстоянии 34 м. Спустя какое время после выстрела он услышит звук от удара пули в мишень, если скорость пули 680 м/с, а скорость распространения звука в воздухе 340 м/с?



з) Велосипедист и мотоциклист одновременно выезжают на шоссе. Скорость велосипедиста 12 м/с, а мотоциклиста 54 км/ч. Напишите уравнения их движения $x = x(t)$. Какое расстояние будет между ними через 5 мин?

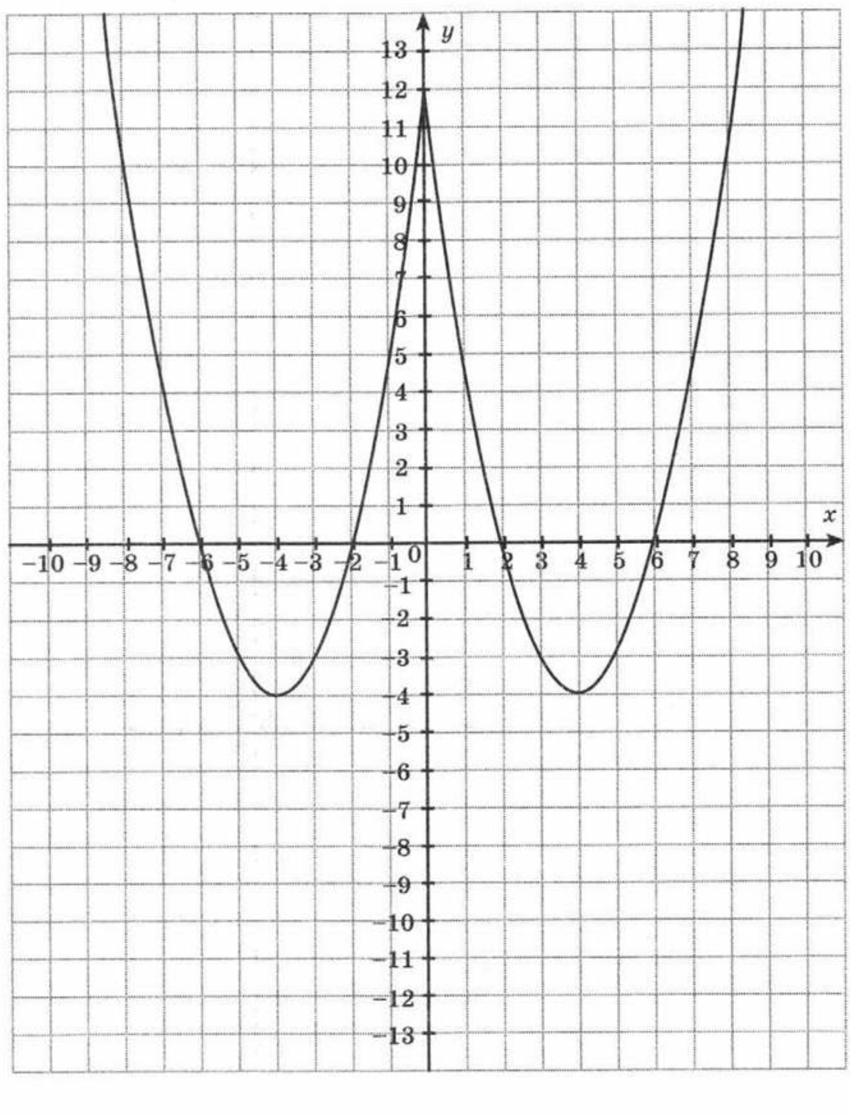


6.5. Функция $y = |x|$ и её график

11. Постройте график функции:

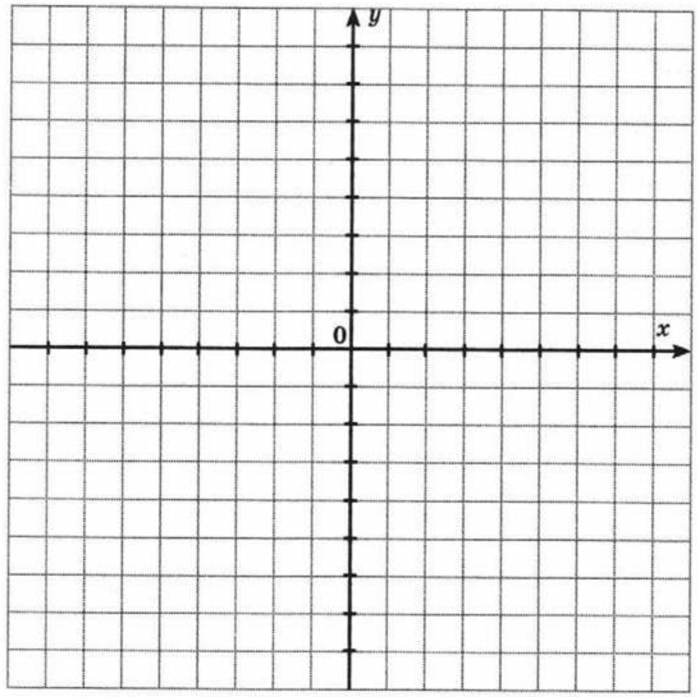
а) ***Пример.*** $y = x^2 - 8|x| + 12$

Решение. Определим чётность функции. Значение для $y(-x)$ совпадает со значением для $y(x)$, поэтому данная функция чётная. Тогда её график симметричен относительно оси Oy. Строим график функции $y = x^2 - 8x + 12$ для $x \geq 0$ и симметрично отображаем график относительно Oy для отрицательных x.



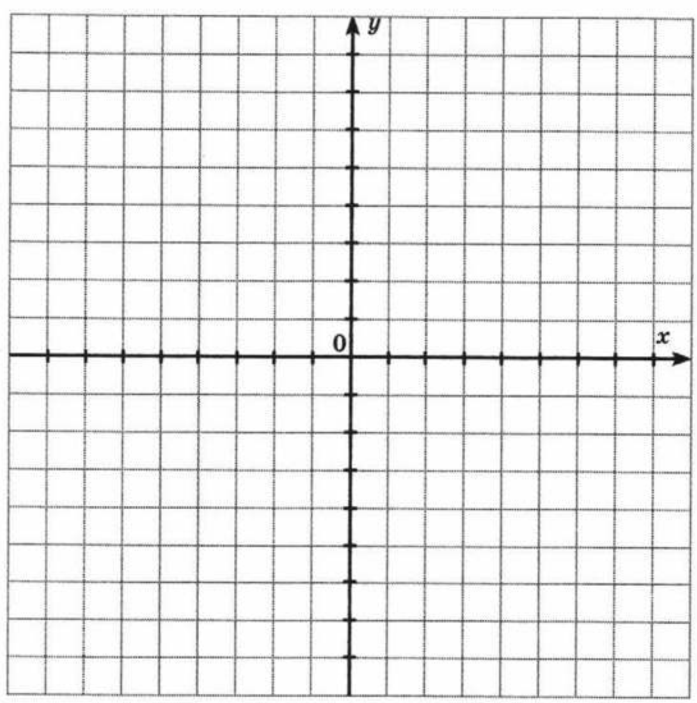
б) $y = |x^2 - 8x + 12|$

x	y



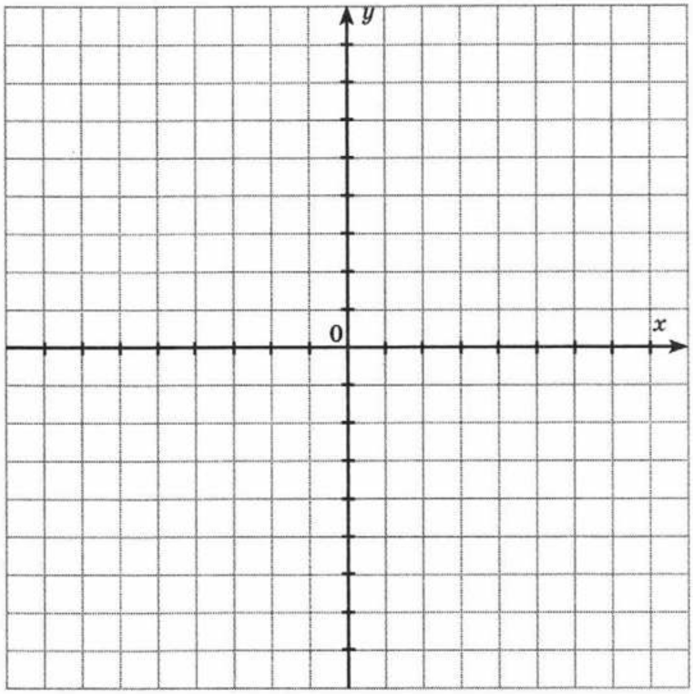
в) $y = |x^2 - 8|x| + 12|$

x	y



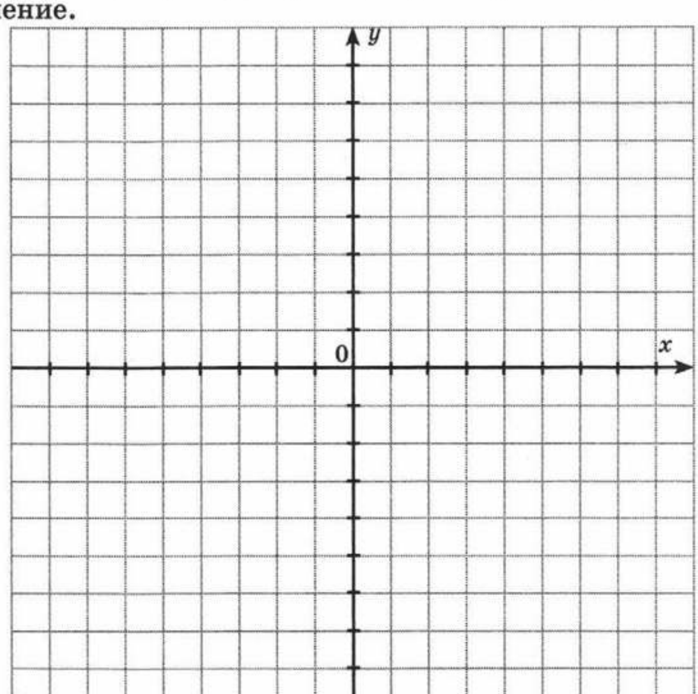
г) $y = |2 - |1 - |x|||$

x	y



12. Постройте график функции $y = |x| + |x - 1| + |x + 1|$ и найдите её наименьшее значение.

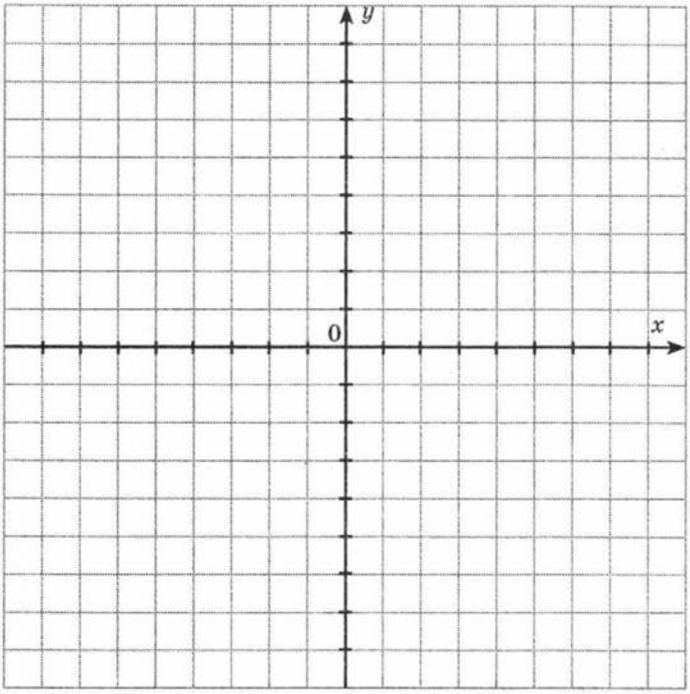
x	y



13. Постройте график функции:

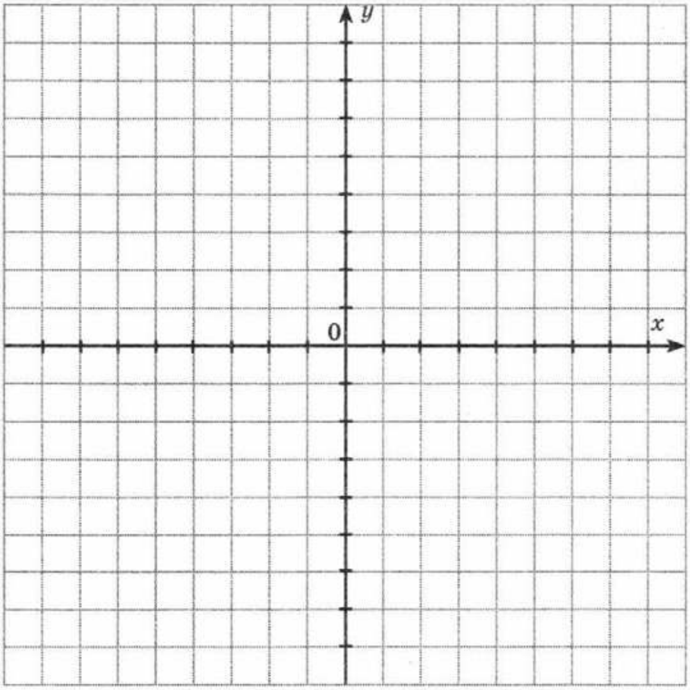
а) $y = x - 2 - |x|$

x	y



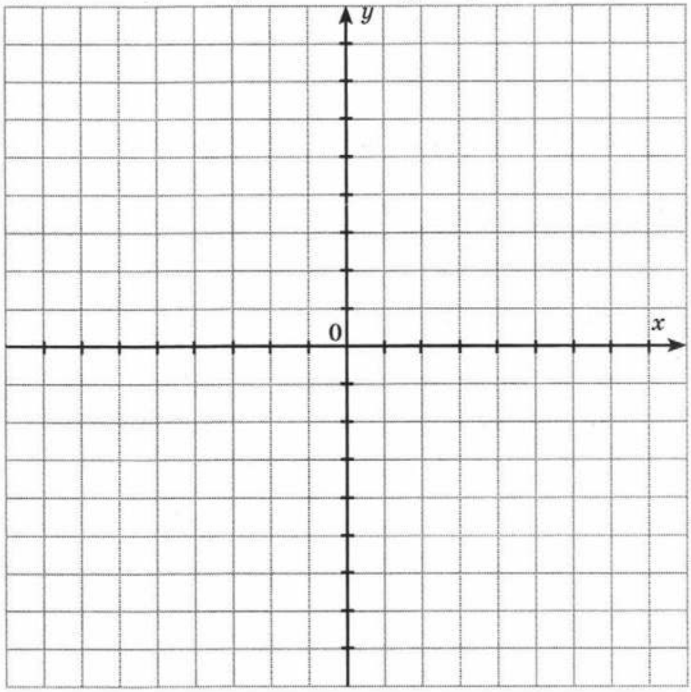
б) $y = |x| - 1$

x	y



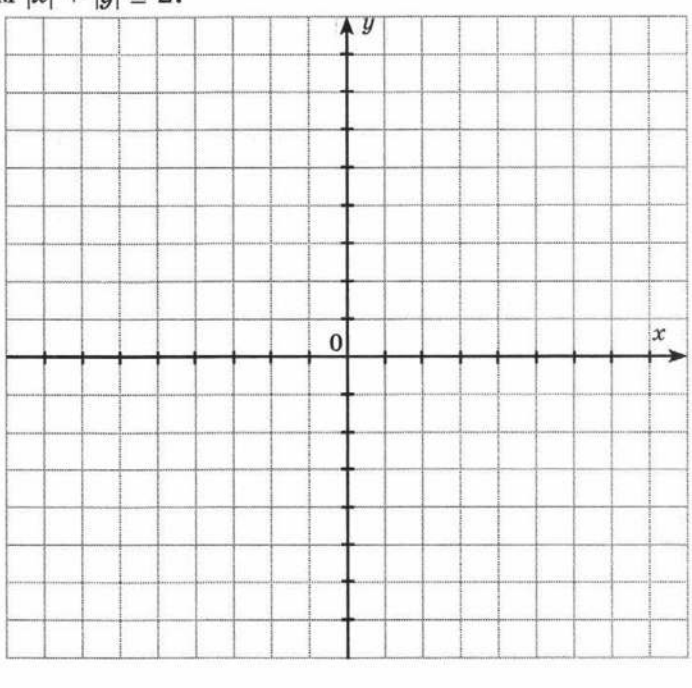
14. Постройте множество точек на плоскости, декартовы координаты которых x и y удовлетворяют уравнению $|y| = ||x - 1| - 1|$.

x	y



15. Найдите площадь фигуры, множество точек $M(x, y)$ которой задано неравенством $|x| + |y| \leq 2$.

x	y



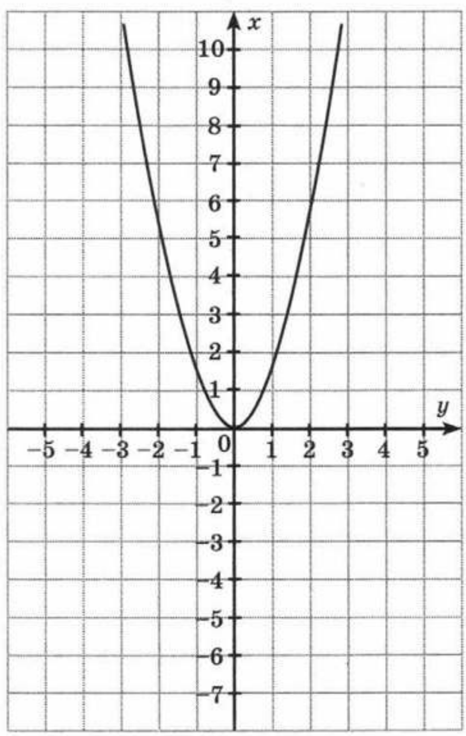
§7. Квадратичная функция

7.1–7.2. Функция $y = ax^2$

1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2x^2$ на отрезке:

а) ***Пример.*** [0; 2]

Решение. Построим график функции $y = 2x^2$ и выделим его часть на отрезке [0; 2] (см. рис.). Замечаем, что $y_{наим} = 0$ (достигается при $x = 0$), а $y_{наиб} = 8$ (достигается при $x = 2$).



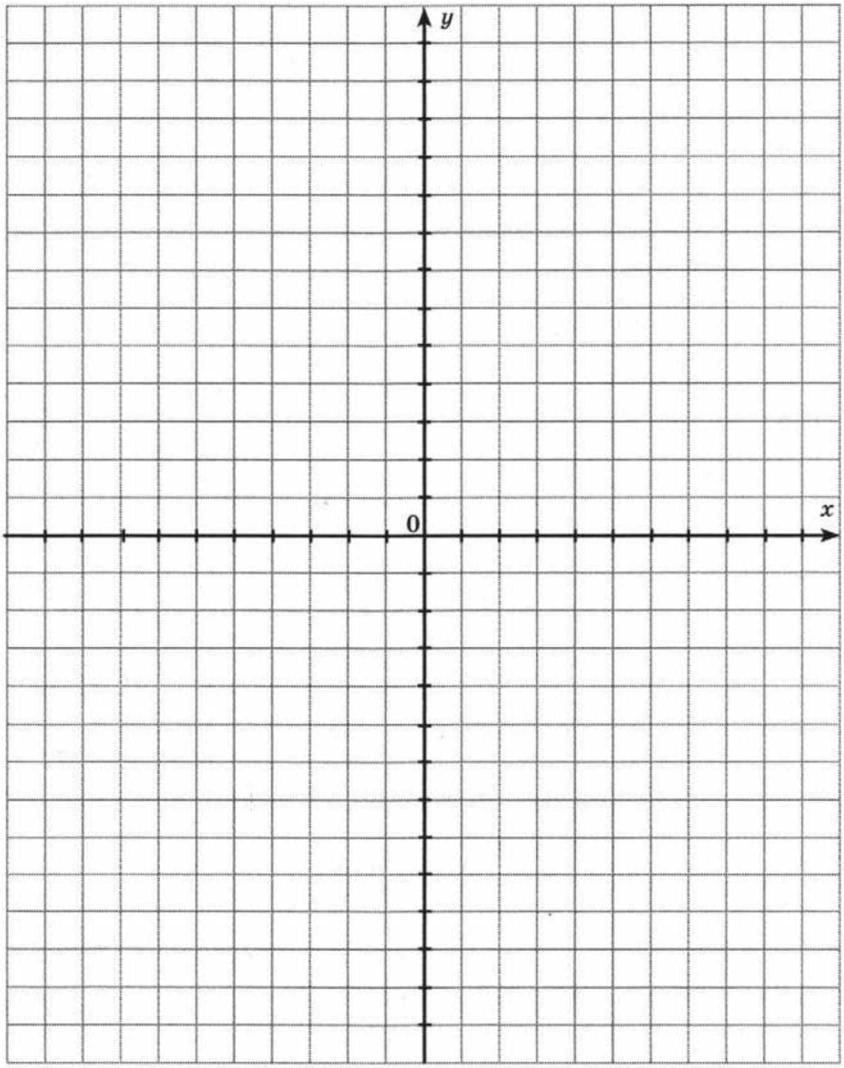
б) [−2; −1]: $y_{макс.} =$ ____________________

$y_{мин.} =$ ____________________

в) [−1; 1,5]: $y_{макс.} =$ ____________________

$y_{мин.} =$ ____________________

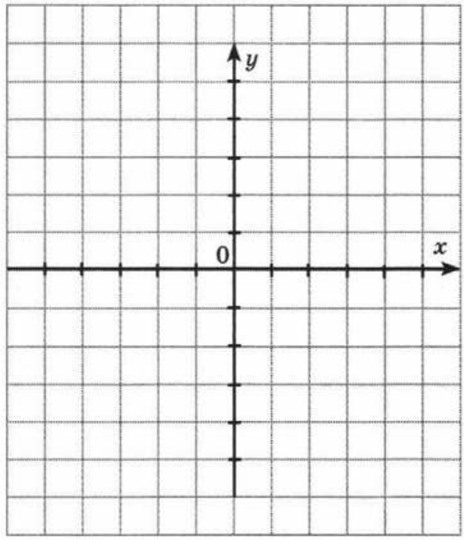
2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = -2x^2 + 8x - 5$ на отрезке $[0; 3]$.



3. Постройте график функции:

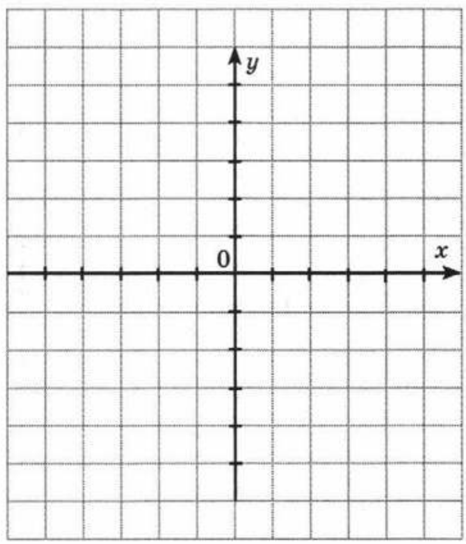
а) $y = -3x^2 - 6x + 1$

x	y



б) $y = 2x^2 - 6x + 1$

x	y



4. Не выполняя построения графика функции $y = -3x^2 - 6x + 1$, ответьте на следующие вопросы:

а) Какая прямая служит осью параболы? ______________________

____

б) Каковы координаты вершины параболы? ____________________

____

в) Куда (вверх или вниз) направлены ветви параболы? ______________

____

г) При каком значении y ветвь параболы пересекает ось OY? ________

____

5. Дана функция $f(x) = 3x^2 + x - 1$. Найдите:

а) $f(-x) =$

б) $f(2x) =$

в) $f(x^2) =$

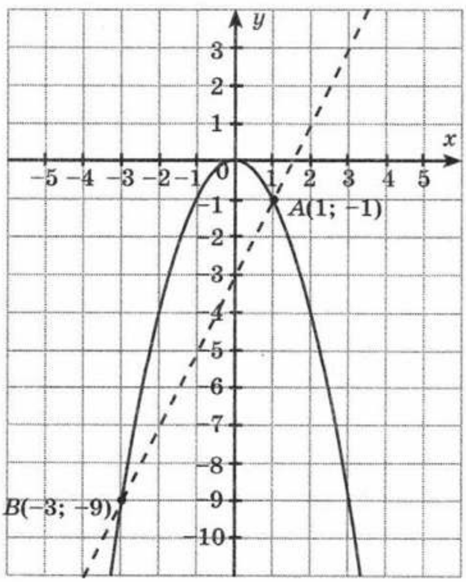
г) $f(x^3) =$

д) $f(x^2 - 2x) =$

7.3. График функции $y = a(x - x_0)^2 + y_0$

6. ***Пример.*** Решите уравнение: $-x^2 = 2x - 3$.

Решение. Чтобы графически решить уравнение, рассмотрим две функции: $y = -x^2$ и $y = 2x - 3$. Построим параболу — график функции $y = -x^2$ (см. рис.). Построим график функции $y = 2x - 3$. Это — прямая, для её построения достаточно найти любые две точки графика. Если $x = 0$, то $y = -3$; если $x = 1$, то $y = -1$. Итак, нашли две точки $(0; -3)$ и $(1; -1)$. Прямая, проходящая через эти две точки (график функции $y = 2x - 3$), изображена на том же чертеже (см. рис.). По чертежу находим, что прямая и парабола пересекаются в двух точках $A(1; -1)$ и $B(-3; -9)$. Значит, данное уравнение имеет два корня: 1 и -3 — это абсциссы точек A и B.



Ответ: 1, -3.

7. Дана функция $y = f(x)$, $f(x) = 3x^2$. Найдите значения функции:

а) $f(1) =$

б) $f(-2) =$

в) $f(a) =$

г) $f(2a) =$

д) $f(a + 1) =$

е) $f(-x) =$

ж) $f(3x) =$

з) $f(x - 1) =$

и) $f(x + a) =$

к) $f(x) + b =$

л) $f(x + a) + b =$

м) $f(x^2) =$

н) $f(2x^3) =$

7.4. Квадратичная функция и её график

8. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -0,5\ x^2, & -4 \le x \le 0; \\ x + 1, & 0 < x \le 1; \\ 2x^2, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Вычислите:

а) $f(-4) =$

б) $f(-2) =$

в) $f(0) =$

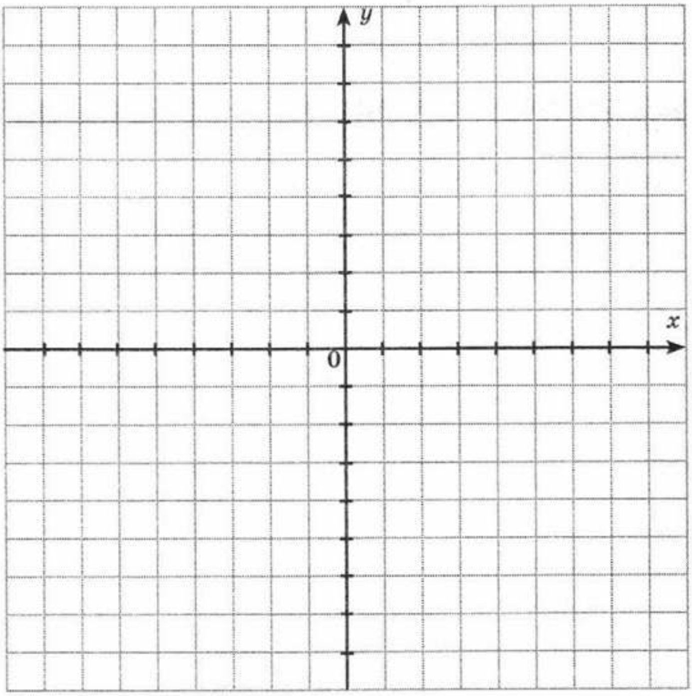
г) $f\left(\frac{1}{2}\right) =$

д) $f(1,5) =$

е) $f(2) =$

ж) $f(3) =$

9. Постройте график вышеуказанной функции.



10. С помощью полученного выше графика перечислите свойства функции.

§8. Функция $y = \dfrac{k}{x - x_0} + y_0$

8.1–8.3. Обратная пропорциональность.

Функция $y = \dfrac{k}{x}$

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \dfrac{1}{x}$ на отрезках:

а) $\left[\dfrac{1}{2}; 4\right]$

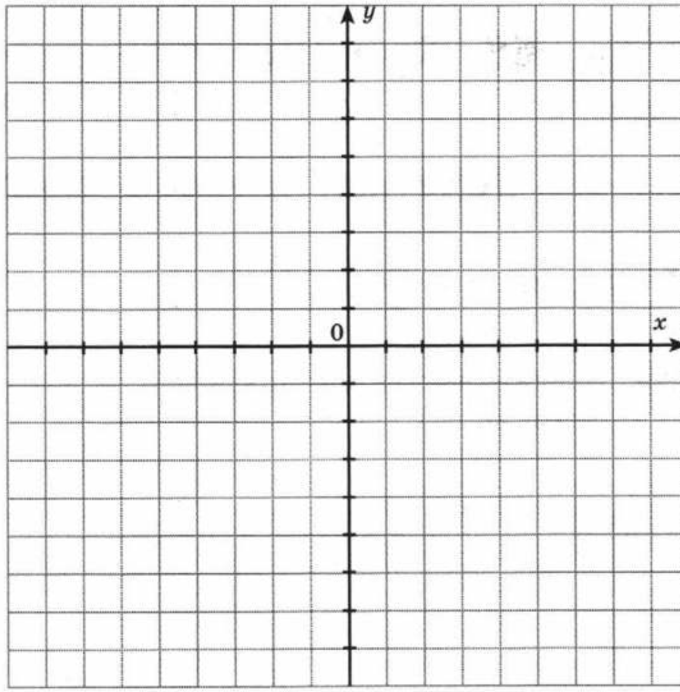
б) $[-8; -1]$

2. Решите уравнение $\dfrac{4}{x} = 5 - x$.

3. Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & -2 \le x \le 1; \\ -\dfrac{1}{x}, & x > 1. \end{cases}$$

x	y



4. Докажите, что функция $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{2}{x}$, удовлетворяет соотношению

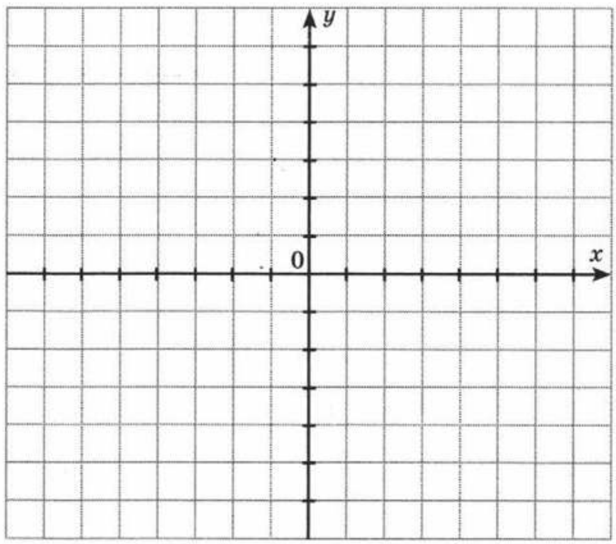
$$f(x - 3) - f(x + 2) = 2{,}5f(x - 3) \cdot f(x + 2).$$

8.4. График функции $y = \dfrac{k}{x - x_0} + y_0$

5. Постройте график функции:

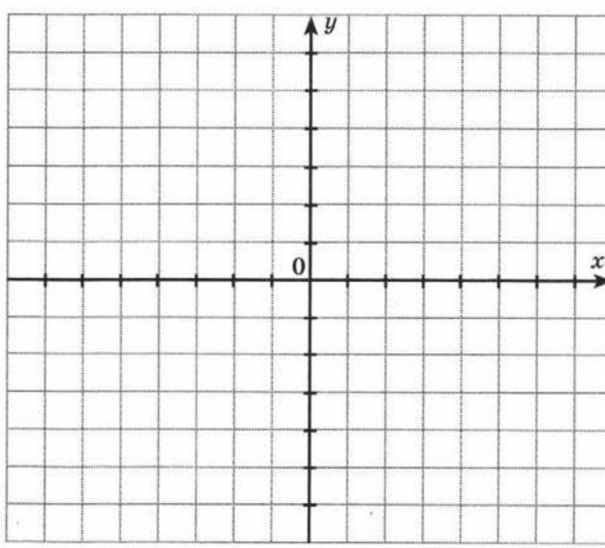
а) $y = \dfrac{2}{x-1}$

x	y



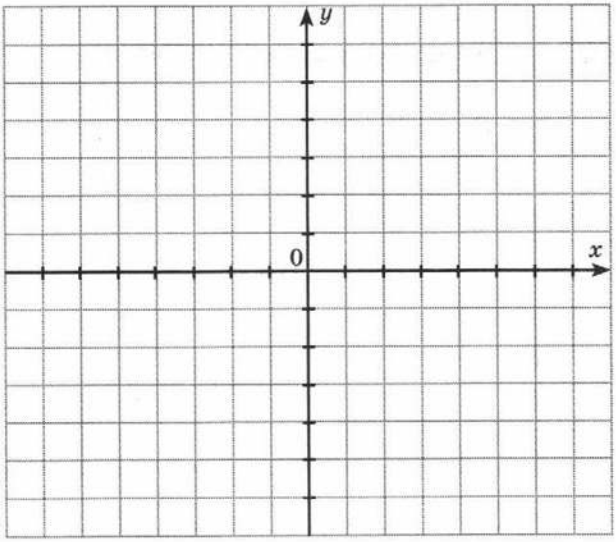
б) $y = -\dfrac{1}{x+7} - 4$

x	y



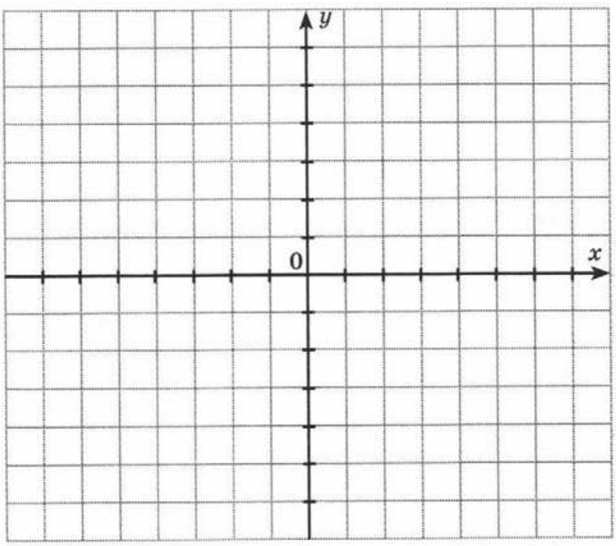
в) $y = \dfrac{4}{x + 5} + 1$

x	y



г) $y = \dfrac{4}{x - 5} + 1$

x	y



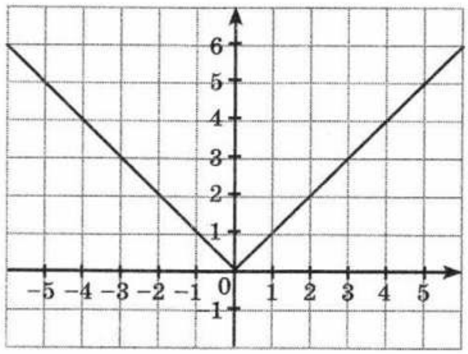
Дополнения к главе III

1. Построение графиков функций, содержащих модули

1. Постройте график функции:

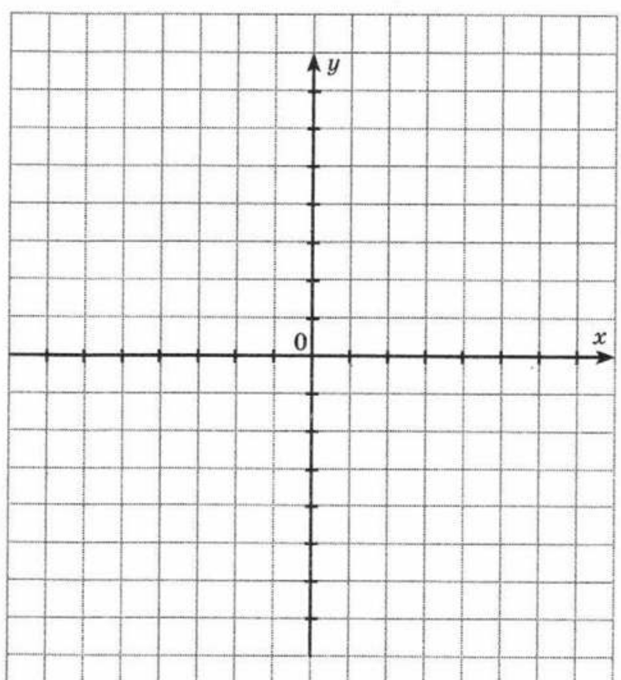
а) ***Пример.*** $y = |x|$

Решение. График функции изображён на рисунке.



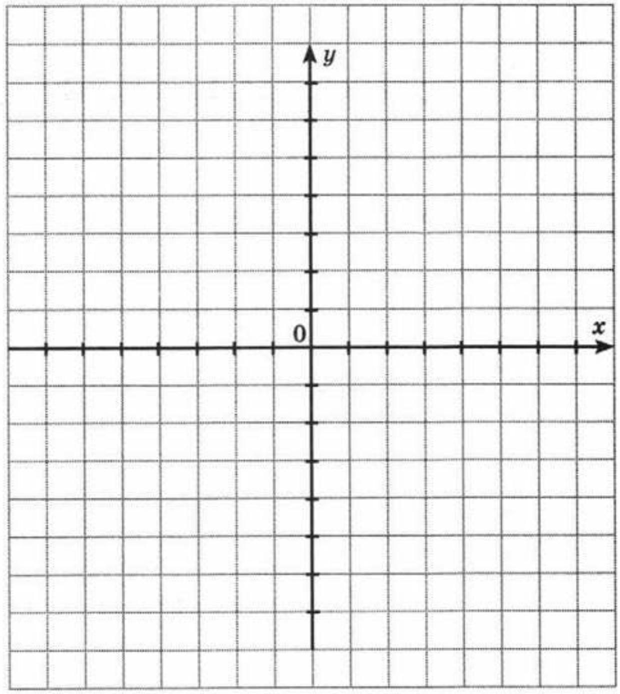
б) $y = |x| + 1$

x	y



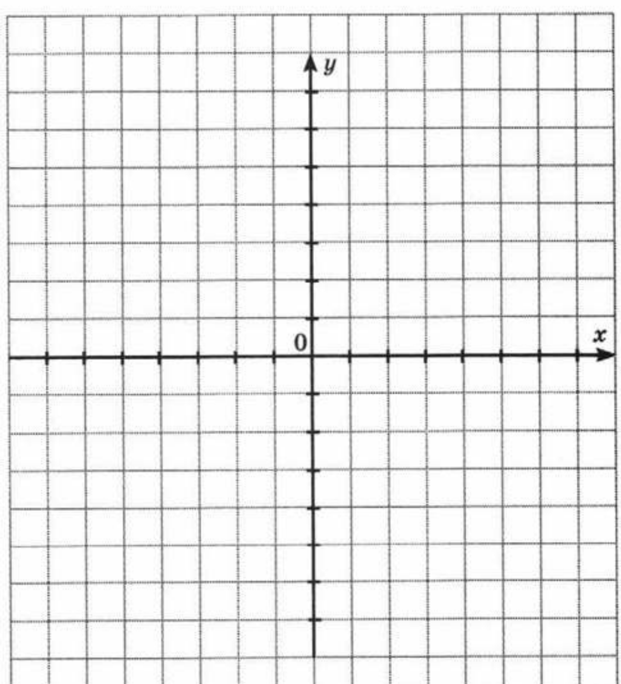
в) $y = |x + 1|$

x	y



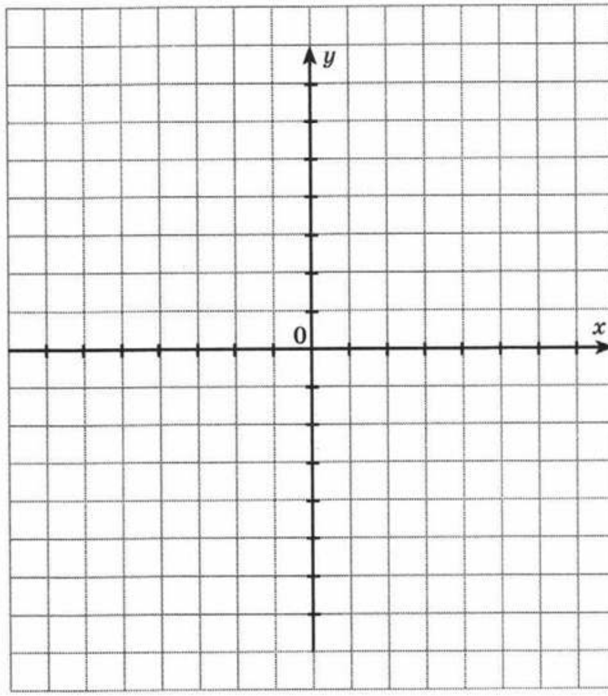
г) $y = x^2 - 6|x| + 3$

x	y



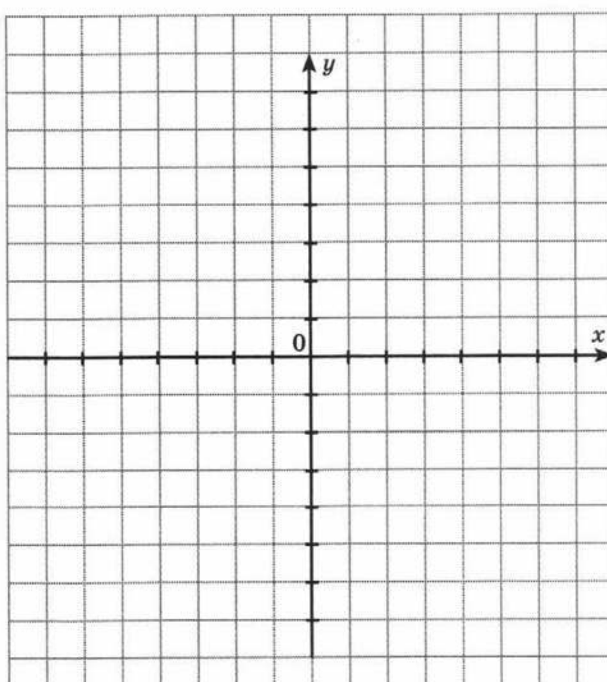
д) $y = |x^2 - 6x + 3|$

x	y



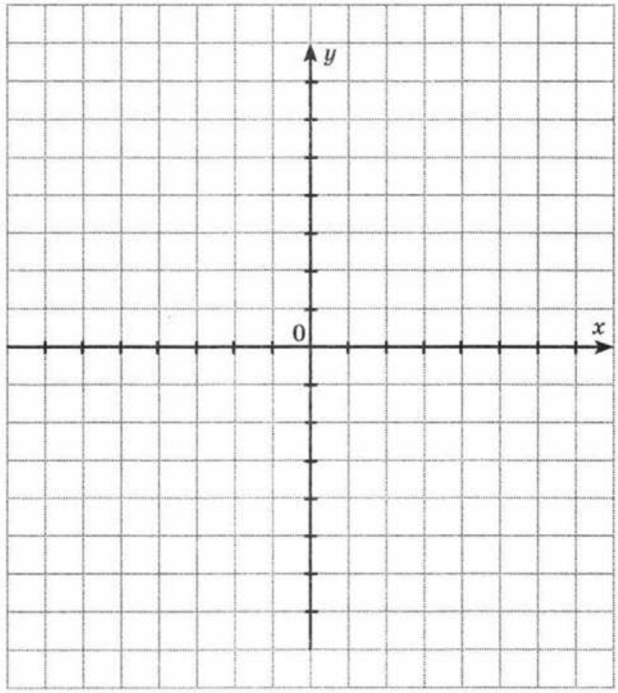
е) $y = |x^2 - 6|x| + 3|$

x	y



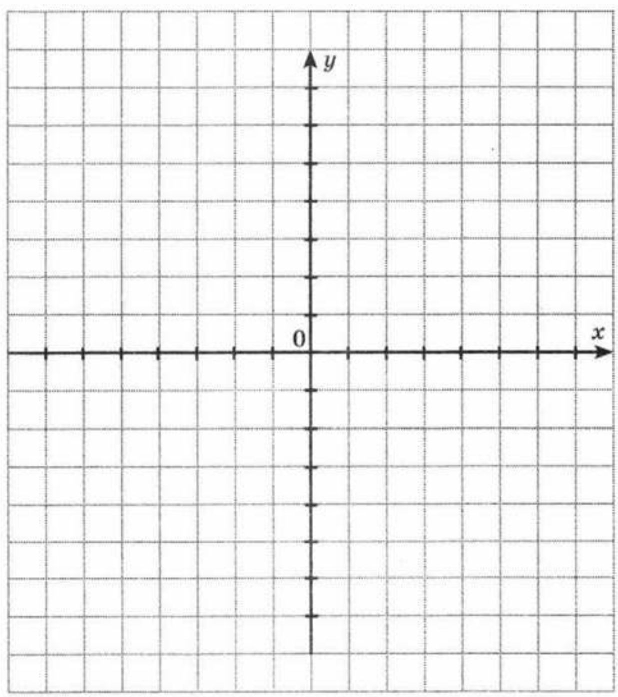
ж) $y = |x^2 - 6x + 3| - 3$

x	y



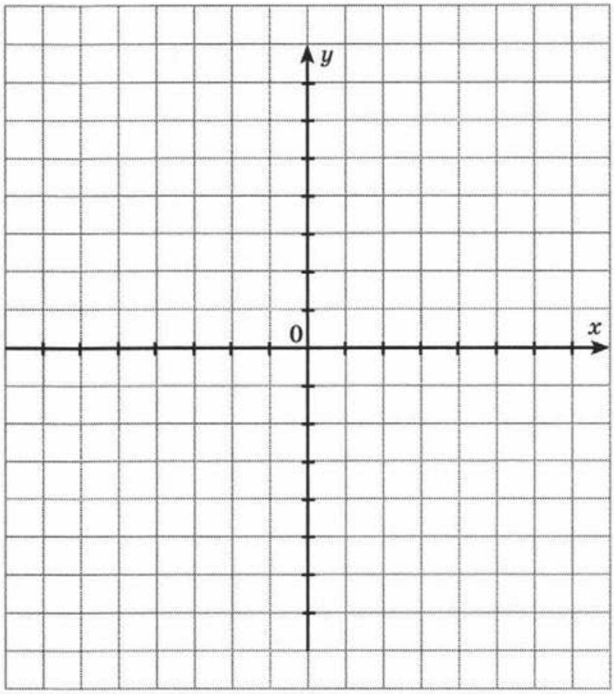
з) $y = |x|(x - 6) + 3$

x	y



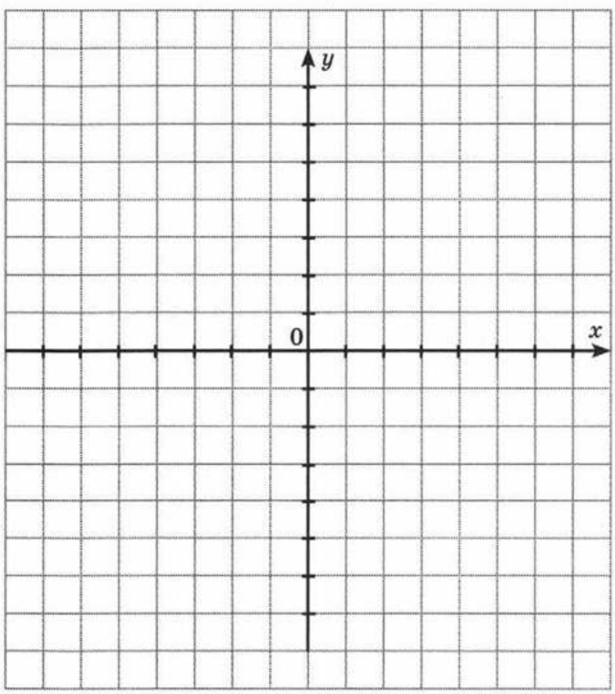
и) $y = x|x - 6| + 3$

x	y



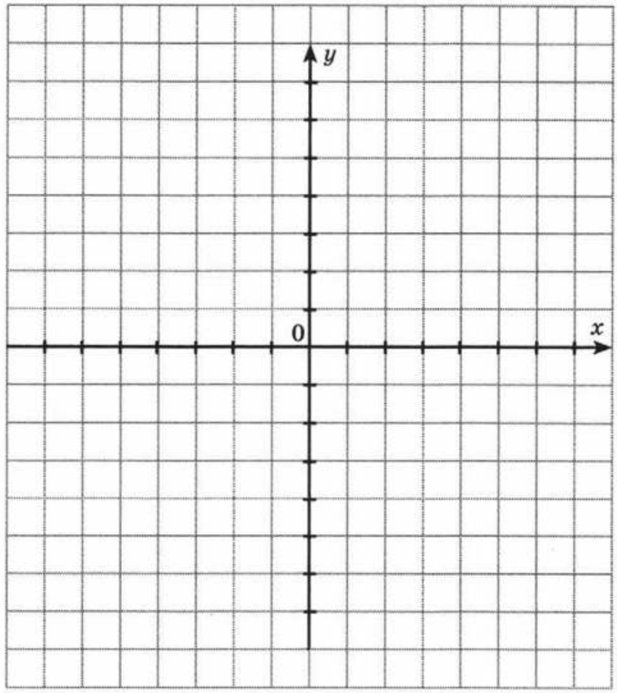
к) $y = x^2 - 5x + |x - 3|$

x	y



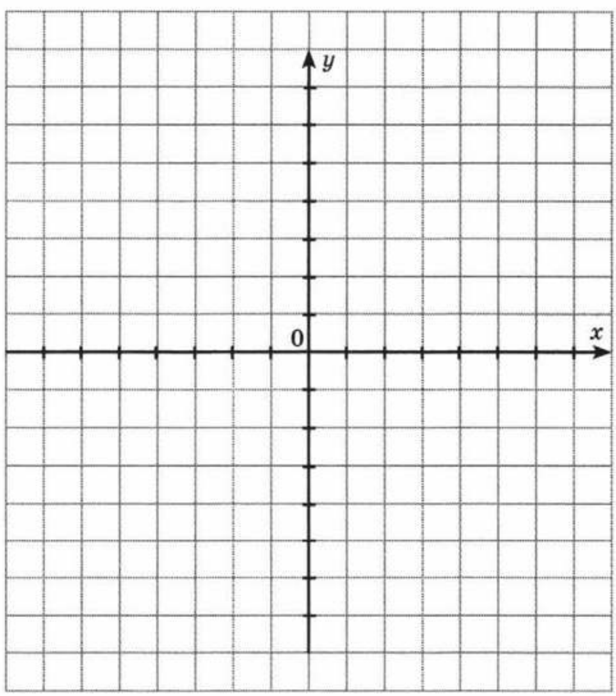
л) $y = |x^2 - 5x| + x - 3$

x	y



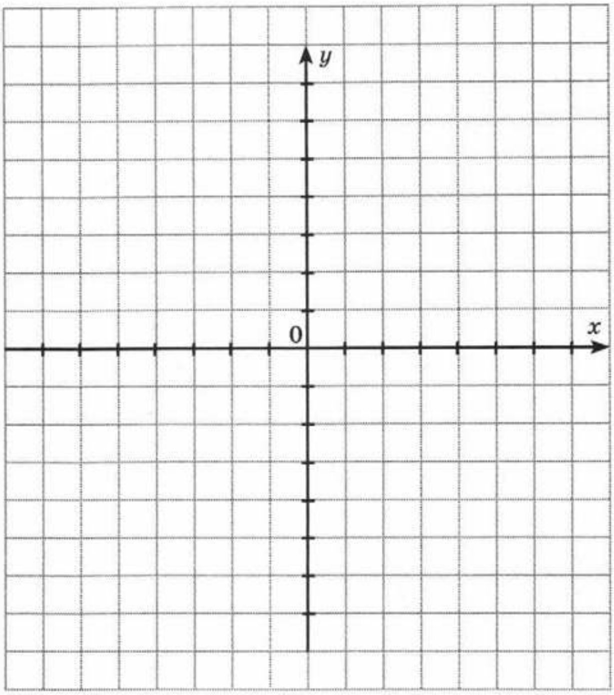
м) $y = |x^2 - 5x + |x - 3||$

x	y



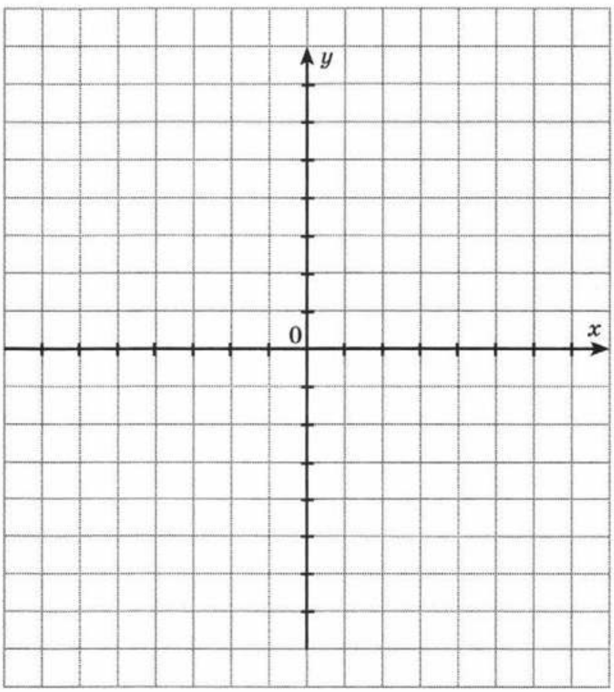
н) $y = \left| |x^2 - 5x| + x - 3 \right|$

x	y



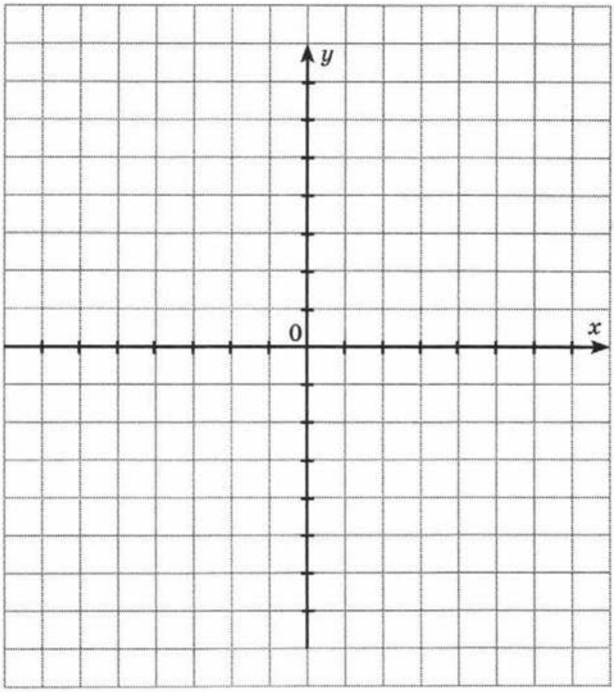
о) $y = |x - 2| \, (|x| - 3) - 3$

x	y



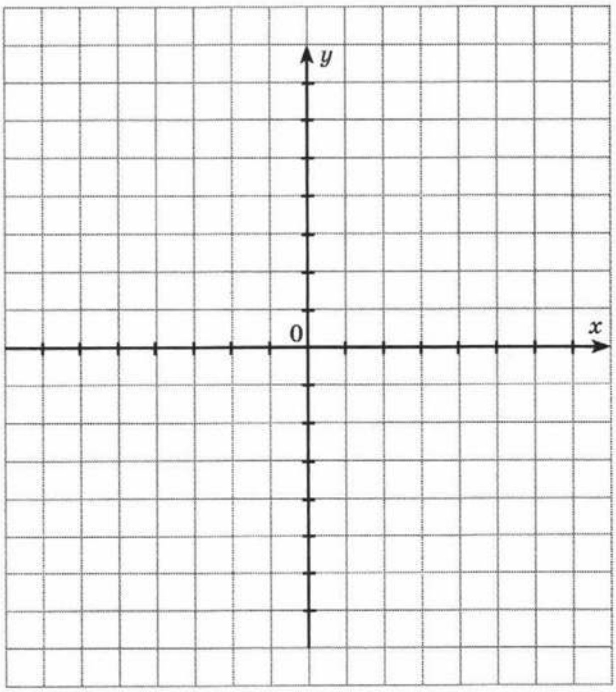
п) $y = x^2 - 8|x| + 12$

x	y



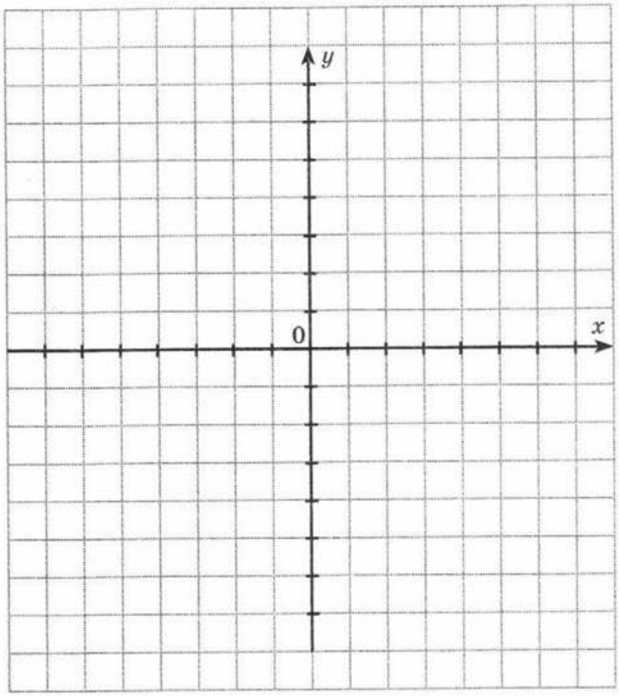
р) $y = |2 - |1 - |x|||$

x	y



c) $y = |x + 1| - |x - 2|$

x	y



2. Дан график вида $y = |x^2 - 8x + 12|$.

Ответьте на вопросы:

а) Какова область значений данной функции? ______________________

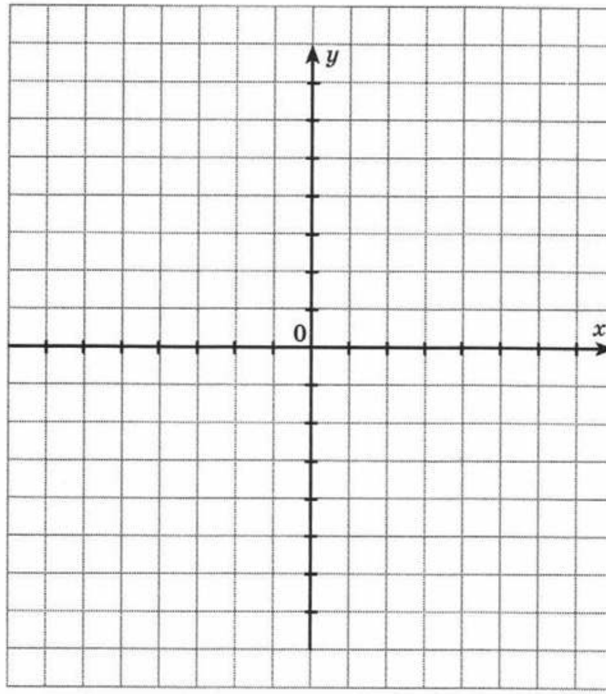
б) Как расположен график (над осью абсцисс или касаясь её)? ______

____

3. Преобразуйте функцию $y = |x^2 - 8|x| + 12|$ для построения её графика.

4. Постройте график функции $y = |x| + |x - 1| + |x + 1|$ и найдите её наименьшее значение.

x	y



2. Уравнение прямой, уравнение окружности

5. Определите координаты центра и диаметр окружности, заданной уравнением:

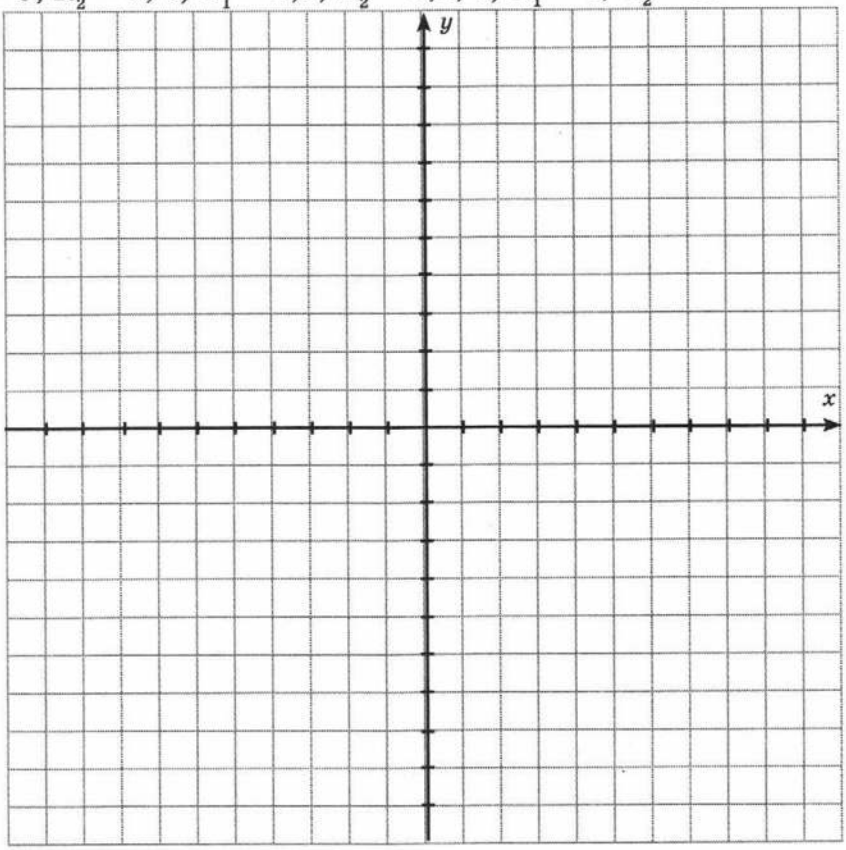
а) $x^2 + y^2 = 16$

б) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$

в) $x^2 - 4x + y^2 = 12$

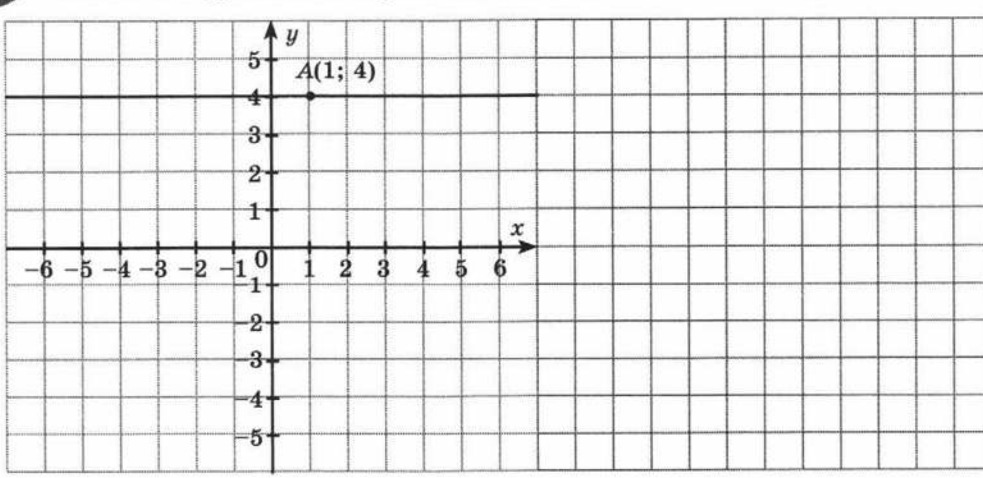
6. Определите взаимное расположение окружностей $q_1(O_1;\ R_1)$ и $q_2(O_2;\ R_2)$, если $O_1(2;\ 3)$, $O_2(6;\ 6)$ и:

а) $R_1 = 3$, $R_2 = 2$; б) $R_1 = 1{,}5$, $R_2 = 2{,}8$; в) $R_1 = 4$, $R_2 = 2$.

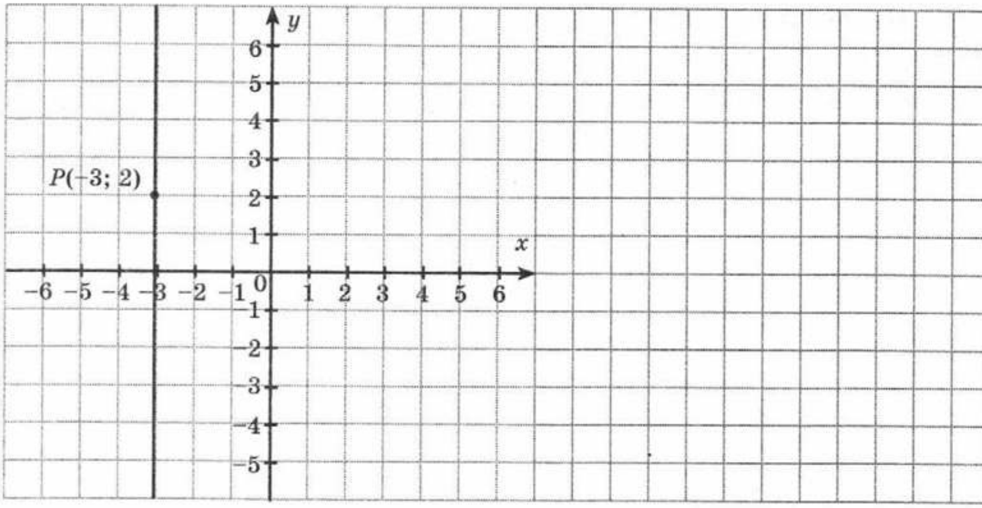


7. Составьте уравнения прямых, изображённых на рисунках:

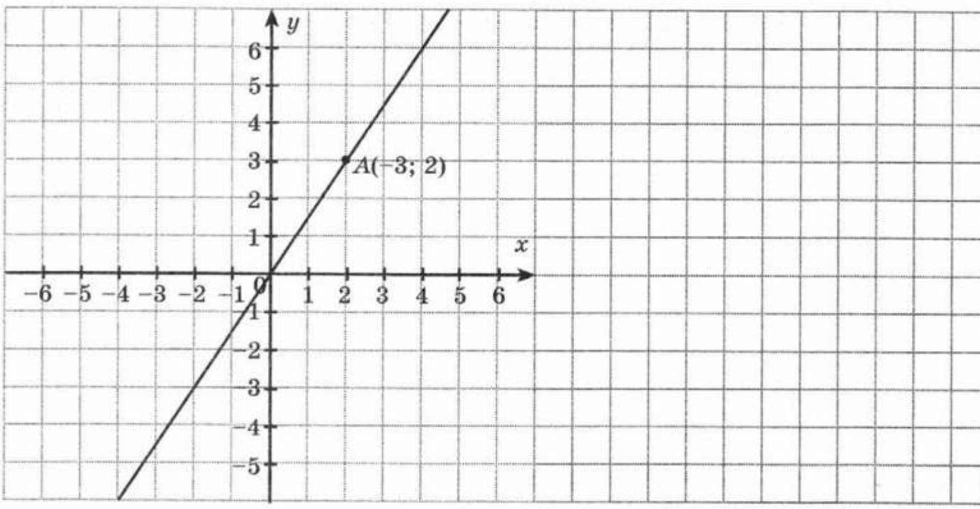
а)



б)



в)

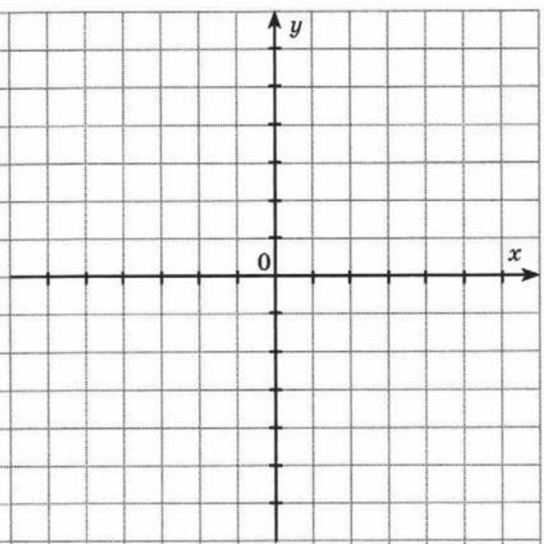


8. Составьте уравнение окружности, проходящей через начало координат и точки (6; 0) и (0; 8).

9. Докажите, что линия, заданная уравнением $x^2 + 6x + y^2 = 0$, является окружностью. Является ли отрезок AB, где $A(-1; \sqrt{5})$, $B(-5; -\sqrt{5})$, диаметром этой окружности?

10. Найдите периметр треугольника ABC, у которого точка A — центр окружности радиуса 2, точка B — центр окружности $x^2 - 12x + y^2 - 6y + 36 = 0$, а точка C — одна из точек пересечения данных окружностей.

x	y



ГЛАВА IV. СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

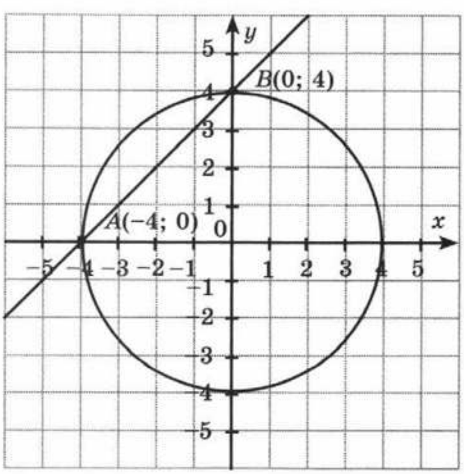
§9. Системы рациональных уравнений

9.1. Понятие системы рациональных уравнений

1. Решите систему уравнений:

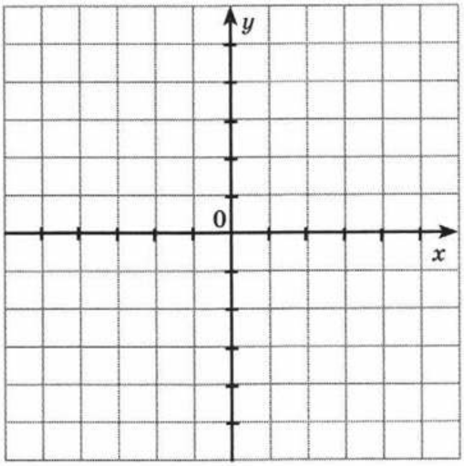
а) ***Пример.*** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y - x = 4 \end{cases}$

Решение. Построим график уравнения $x^2 + y^2 = 16$ — это окружность с центром в начале координат и радиусом 4 (см. рис.). Построим график уравнения $y - x = 4$. Это прямая, проходящая через точки (0; 4) и (−4; 0). Окружность и прямая пересекаются в точках A и B (см. рис.). Судя по построенной геометрической модели, точка A имеет координаты $A(-4; 0)$, а точка B — координаты $B(0; 4)$. Проверка показывает, что на самом деле пара (−4; 0) и пара (0; 4) являются решениями обоих уравнений системы, а значит, и решениями системы уравнений. Следовательно, заданная система уравнений имеет два решения: (−4; 0) и (0; 4).



Ответ: (−4; 0); (0; 4).

б) $\begin{cases} 2x^2 - y = 0, \\ xy = 2 \end{cases}$



9.2. Системы уравнений первой и второй степени

2. Решите систему уравнений:

а) ***Пример.*** $\begin{cases} x + y + 2xy = 7, \\ xy + 2(x + y) = 8 \end{cases}$

Решение. Обозначим $a = x + y$; $b = xy$.
Получаем систему уравнений

$\begin{cases} a + 2b = 7, \\ b + 2a = 8 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = 7 - 2b, \\ b + 14 - 4b = 8. \end{cases}$

Отсюда $a = 3$, $b = 2$.
Возвращаясь к переменным x и y, получаем

$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$

Решив эту систему, получаем:
$y^2 - 3y + 2 = 0$, $y_1 = 1$; $x_1 = 2$; $y_2 = 2$; $x_2 = 1$.
Ответ: (2; 1), (1; 2).

б) $\begin{cases} y^2 - xy = 12, \\ x^2 - xy = -3 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + y = 11, \\ x^2 + y^2 = 53 \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 8, \\ \dfrac{5}{x} - \dfrac{2}{y} = 1 \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5, \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 13 \end{cases}$

е) $\begin{cases} 8x^2 - 6xy + y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

ж) $\begin{cases} y^2 - xy = -12, \\ x^2 - xy = 28 \end{cases}$

з) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 49, \\ x + y + xy = 23 \end{cases}$

3. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} axy + x - y + 1,5 = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

9.3. Решение задач при помощи систем уравнений первой и второй степени

4. ***Пример.*** Найдите длины сторон прямоугольника, если его периметр равен 16 м, а площадь равна 15 м^2.

Решение. Обозначим длины сторон прямоугольника буквами x и y. По условию задачи должны выполняться равенства $2x + 2y = 16$, т.е. $x + y = 8$ и $xy = 15$, т.е. задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 15, \end{cases}$$

где значения x и y являются числами, подстановка которых в оба уравнения системы обращает их в верные числовые равенства.
Из первого уравнения находим, что $y = 8 - x$. Подставляя это значение во второе уравнение, получаем $x(8 - y) = 15$, т.е. $8x - x^2 = 15$ или $x^2 - 8x + 15 = 0$. Решим это уравнение:

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4,$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm 2}{2}.$$

Значит, $x_1 = 5$, $x_2 = 3$. Поскольку $y = 8 - x$, то получаем $y_1 = 3$, $y_2 = 5$. В обоих случаях получаем один и тот же прямоугольник, длины сторон которого равны 3 м и 5 м.

5. Найдите длины сторон прямоугольного равнобедренного треугольника, если его периметр равен 21 см, а площадь равна 36 см^2.

6. Найдите стороны первого прямоугольника, если его периметр равен 20 см, одна сторона на 5 см меньше стороны второго прямоугольника, вторая сторона на 3 см меньше соответствующей стороны второго прямоугольника, а площадь второго прямоугольника равна 50 см^2.

9.4. Системы рациональных уравнений

7. Решите систему уравнений:

а) ***Пример.*** $\begin{cases} 2y^2 - x^2 + 2x - 5 = 0, \\ 6y^2 + 8y = 0 \end{cases}$

Решение. Учитывая равенство обоих уравнений нулю, оставим второе уравнение без изменения, а перепишем первое уравнение системы, вычтя из него второе уравнение. Получим равносильную систему уравнений:

$$\begin{cases} -4y^2 - 8y - 5 - x^2 + 2x = 0, \\ 6y^2 + 8y = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение системы теперь можно преобразовать (добавив ± 4) к виду:

$$-(2y + 2)^2 - (x - 1)^2 = 0$$

Откуда имеем равенство $-(2y + 2)^2 = (x - 1)^2$, которое выполняется только при нулевых значениях скобок, т.е. $(2y + 2) = 0$ и $(x - 1) = 0$. Отсюда $y = -1$ и $x = 1$. Однако ни первое, ни второе уравнения не удовлетворяются при этих значениях. Поскольку решения второго уравнения $y_1 = 0$, $y_2 = -\dfrac{4}{3}$ также не удовлетворяют первому уравнению, то система не имеет решения.

б) $\begin{cases} y^2 + x^2 = 5, \\ y + y = 3 \end{cases}$

в) $\begin{cases}(x+1)(y+1)=10,\\(x+y)(xy+1)=25\end{cases}$

г) $\begin{cases}x+y+xy=7,\\x^2+y^2+xy=13\end{cases}$

9.5. Решение задач при помощи систем рациональных уравнений

8. Решите задачи:

а) ***Пример.*** Одно из двух положительных чисел на 3 больше другого. Найдите эти числа, если их произведение равно 70.

Решение. Обозначим числа как x и y. Поскольку известно, что одно больше на 3, то составим уравнение $-x = y + 3$. Произведение чисел равно 70, поэтому второе уравнение будет $xy = 70$. Составим систему:

$$\begin{cases}x=y+3,\\xy=70.\end{cases}$$

Подставим значение x из первого уравнения во второе:

$$\begin{cases}x=y+3,\\(y+3)y=70.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=y+3,\\y^2+3y-70=0.\end{cases}$$

Решим квадратное уравнение:

$$y^2+3y-70=0$$

$$D=9+280=289$$

$$y_1=\frac{-3+17}{2}=7;\ \ y_2=\frac{-3-17}{2}=-10.$$

$$\begin{cases}x_1=10,\\y_1=7\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}x_2=-7,\\y_2=-10.\end{cases}$$

Так как по условию задачи числа положительные, то для ответа выбираем пару 10 и 7.

Ответ: 10 и 7.

б) Прямоугольный участок площадью 60000 м^2 требуется огородить забором длиной 1000 м. Найдите длину и ширину участка.

в) Первый пешеход может пройти расстояние между двумя пунктами на 5 часов быстрее, чем второй. Если пешеходы выйдут из этих пунктов одновременно навстречу друг другу, то встретятся через 6 часов. За сколько часов это расстояние пройдёт каждый из пешеходов отдельно?

г) Площадь прямоугольника 270 см^2. Если одну его сторону увеличить на 6 см, а другую уменьшить на 1,5 см, получится равновеликий ему прямоугольник. Найдите стороны первого прямоугольника.

д) Бригада выполнила заказ за 6 дней. Сколько дней потребуется бригаде для выполнения того же заказа, если она будет работать с производительностью труда в 1,5 раза большей?

е) Во сколько раз алюминиевый куб тяжелее деревянного куба того же объёма, если масса 1 кубического сантиметра алюминия – 2,7 грамма, а масса 1 кубического сантиметра дерева — 0,8 грамма?

§10. Графический способ решения систем уравнений

10.1. Графический способ решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

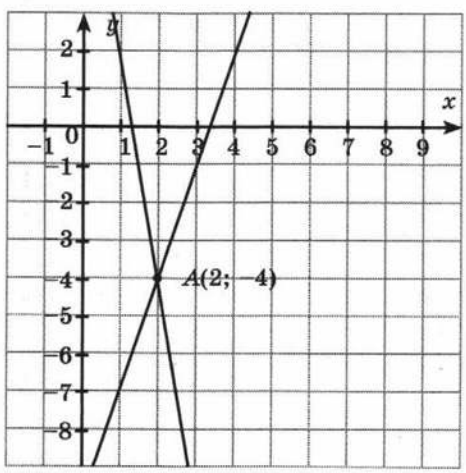
1. Решите графически систему уравнений:

а) ***Пример.*** $\begin{cases} y - 3x = -10, \\ y + 6x - 8 = 0 \end{cases}$

Решение. Выразим y через x в каждом из уравнений системы. Получим равносильную систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 3x - 10, \\ y = -6x + 8. \end{cases}$$

Построим графики функций $y = 3x - 10$ и $y = -6x + 8$ (см. рис.).



Как видно из рисунка, прямые пересекаются только в одной точке — это точка A с координатами (2; −4). Подставив найденные графически значения x и y, убедимся, что решение верное.

Ответ: $x = 2$; $y = -4$.

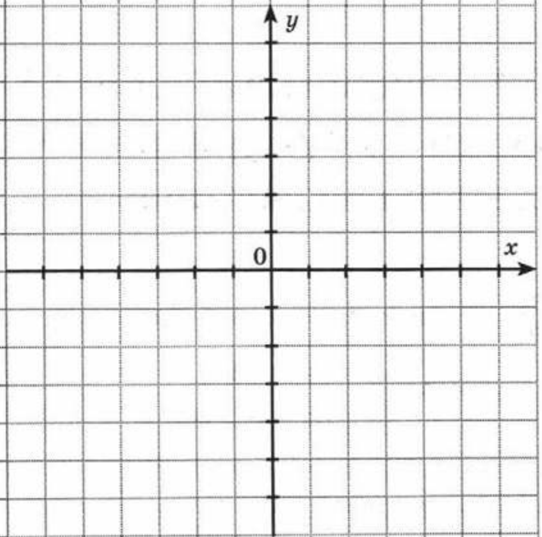
б) $\begin{cases} 2y - x + 8 = 0, \\ x - 4y = 1 \end{cases}$

$2y - x + 8 = 0$

x	y

$x - 4y = 1$

x	y



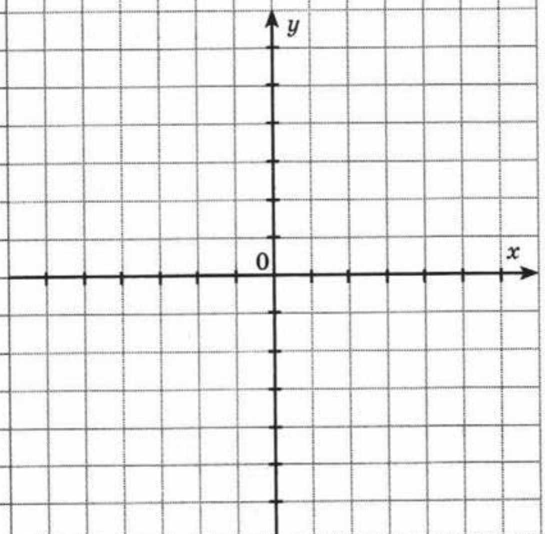
в) $\begin{cases} y + 3x - 14 = 0, \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$

$y + 3x - 14 = 0$

x	y

$2x + 4y = 0$

x	y



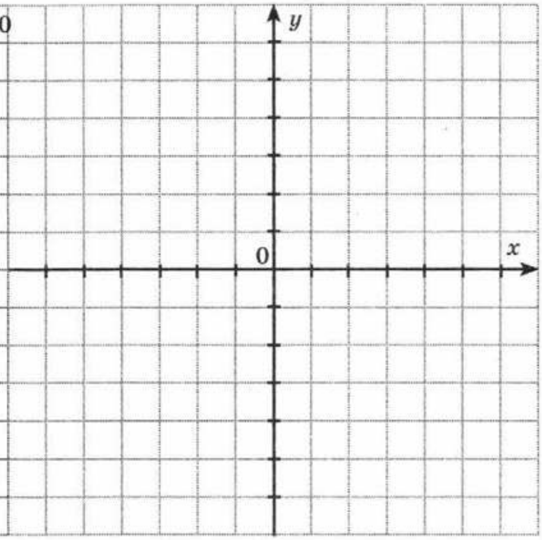
г) $\begin{cases} x - 4 + 2y = 5, \\ 5x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$

$2x + y = 8$

x	y

$5x - 3y + 2 = 0$

x	y



10.2. Графический способ исследования системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

2. Решите графическим способом систему уравнений:

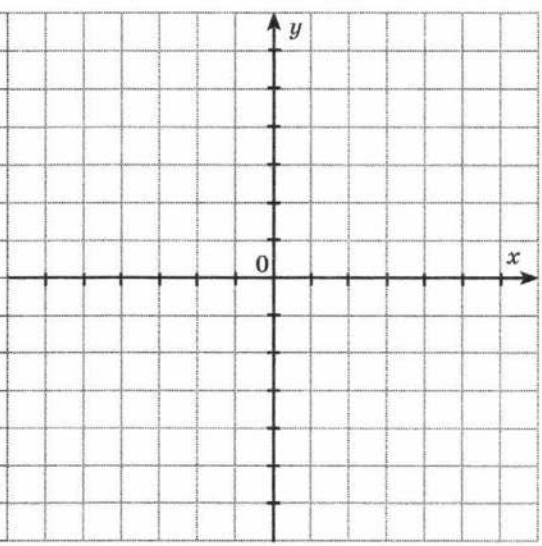
а) $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

$2x + y = 8$

x	y

$2x - y = 0$

x	y



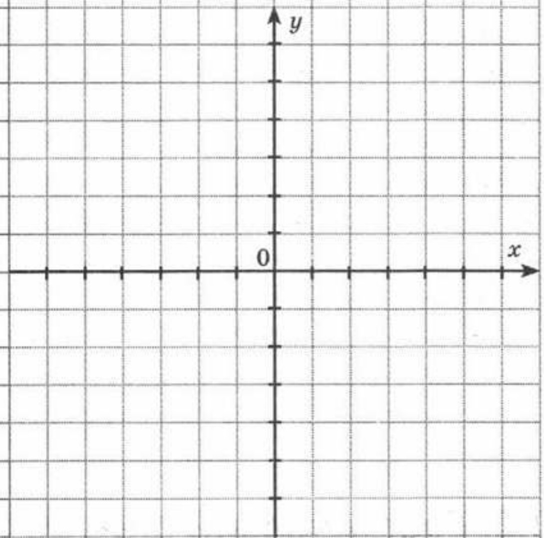
б) $\begin{cases} 3x + y = 2, \\ -6x - 2y = -4 \end{cases}$

$3x + y = 2$

x	y

$-6x - 2y = -4$

x	y



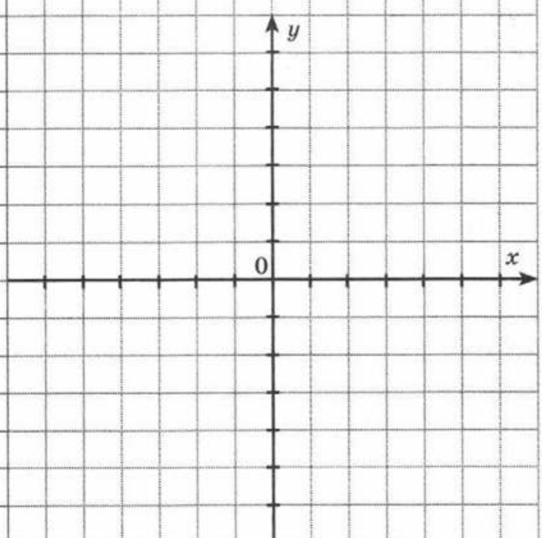
в) $\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ 4x - 6y = -2 \end{cases}$

$2x - 3y = 4$

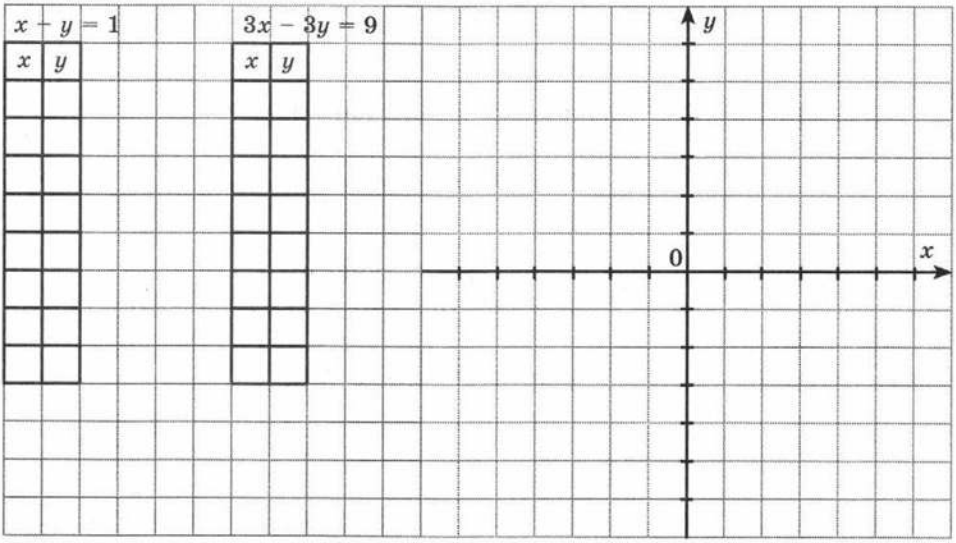
x	y

$4x - 6y = -2$

x	y

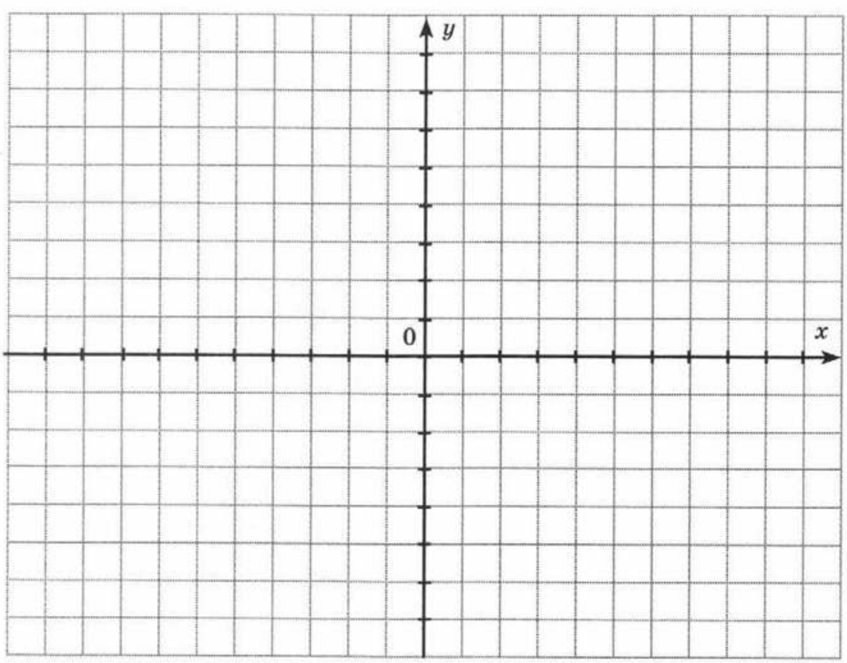


г) $\begin{cases} x - y = 1, \\ 3x - 3y = 9 \end{cases}$



3. Решите задачу графическим способом.

Смешали 200 г 20%-го раствора кислоты и 300 г 40%-го раствора кислоты. Определите массу кислоты и её процентное содержание в полученном растворе.



10.3. Решение систем уравнений первой и второй степени графическим способом

4. ***Пример.*** Найдём графически корни системы:

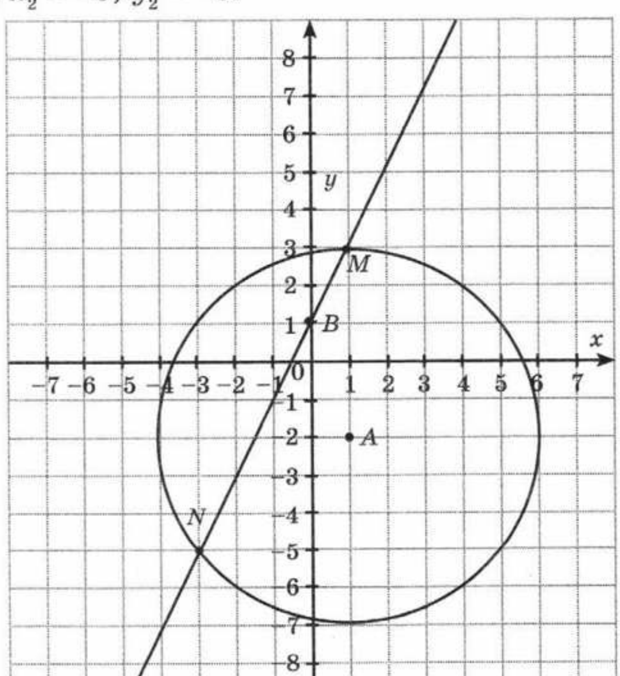
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0, \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

Решение. Выделяя полные квадраты, получаем:
$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) - 1 - 4 - 20 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 - 25.$

Значит, систему уравнений можно записать так:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25, \\ 2x - y = -1. \end{cases}$$

Графиком первого уравнения является окружность с центром $A(1; -2)$ и радиусом 5 (см. рис.). $2x - y = -1$ — уравнение прямой, проходящей через точки $B(0; 1)$ и $C(2; 5)$. Строим окружность радиуса 5 с центром в точке A и проводим прямую через точки B и C. Эти линии пересекаются в двух точках $M(1; 3)$ и $N(-3; -5)$. Значит, решение системы: $x_1 = 1$, $y_1 = 3$; $x_2 = -3$, $y_2 = -5$.

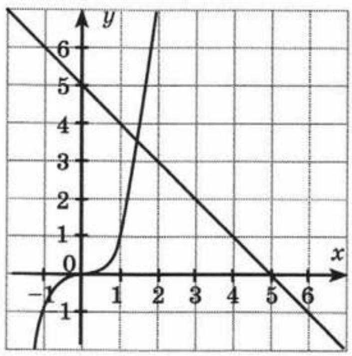


10.4. Примеры решения уравнений графическим способом

5. Решите графическим способом уравнение:

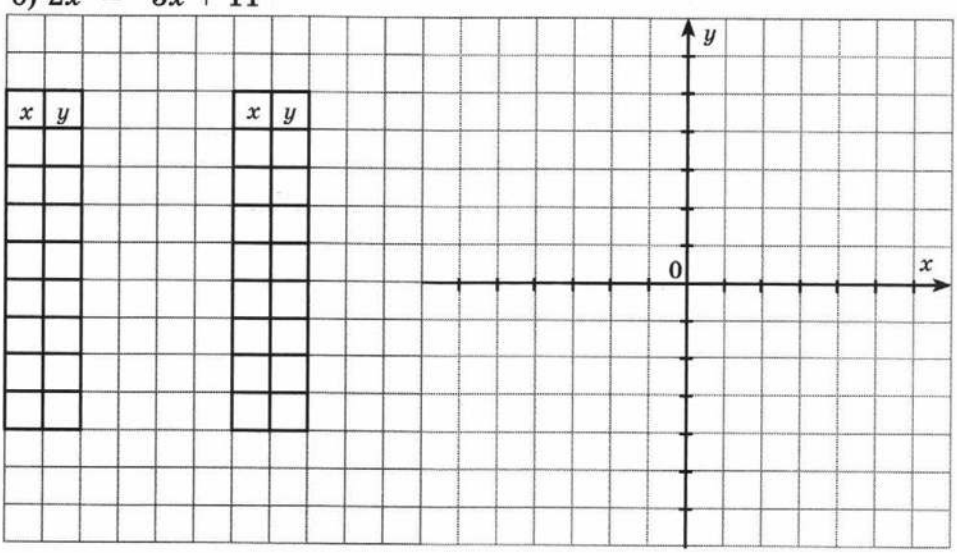
а) ***Пример.*** $x^3 + x - 5 = 0$

Решение. Перепишем уравнение в виде $x^3 = = -x + 5$ и построим графики функций $y = x^3$ и $y = -x + 5$. Из рисунка видно, что они пересекаются в единственной точке. Абсцисса точек пересечения графиков — это то значение переменной x, при котором выражения x^3 и $5 - x$ принимают равные значения. Значит, эта абсцисса и есть корень уравнения $x^3 = 5 - x$. По рисунку видно, что корень находится в промежутке (1; 2) и приблизительно равен 1,5.

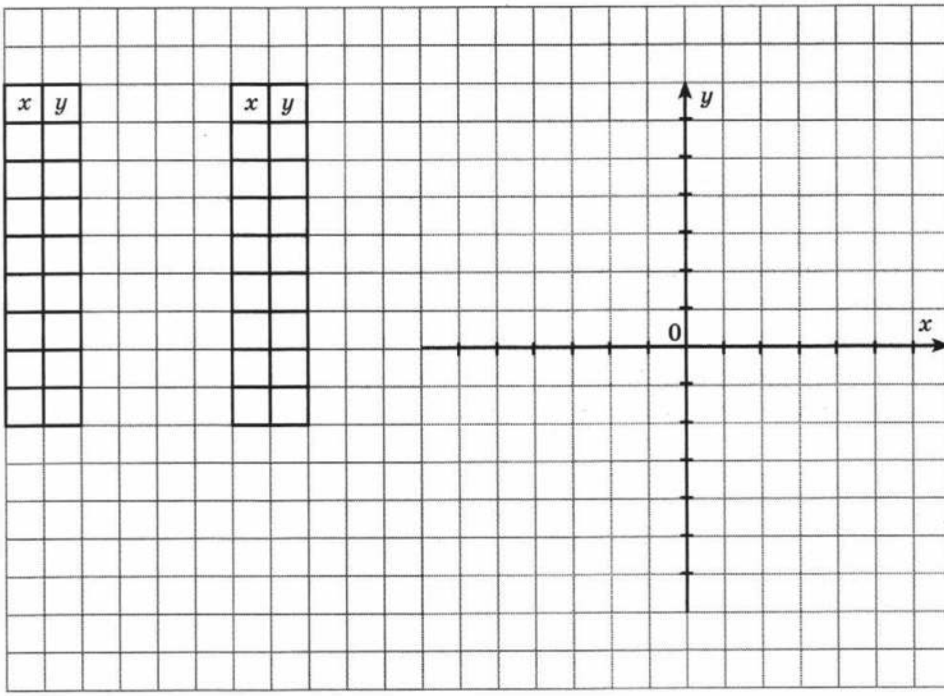


Ответ: $x \approx 1{,}5$.

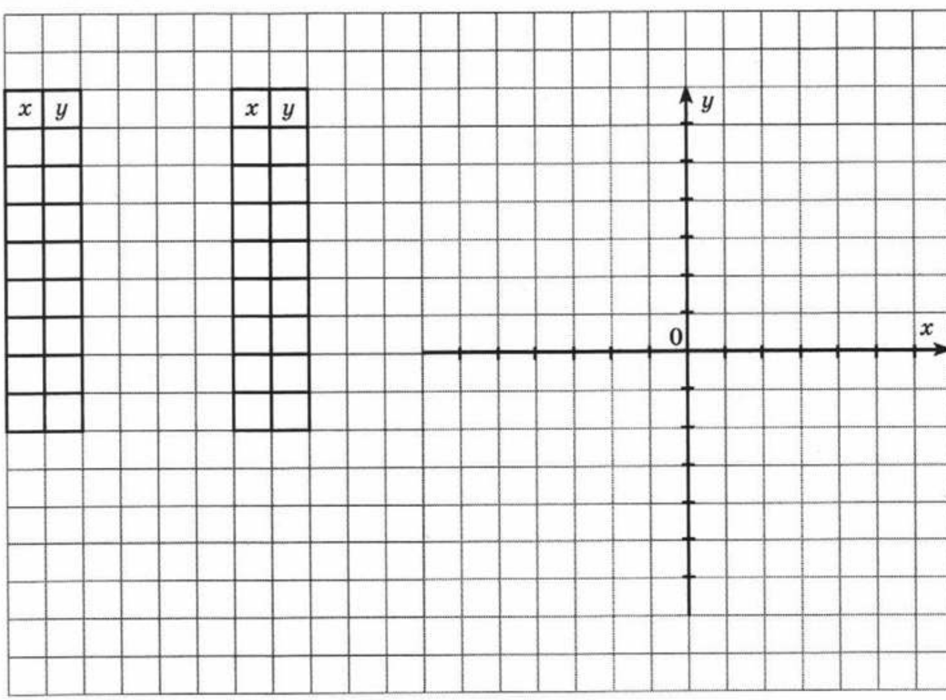
б) $2x^2 = -3x + 11$



в) $x^2 = -2x + 3$



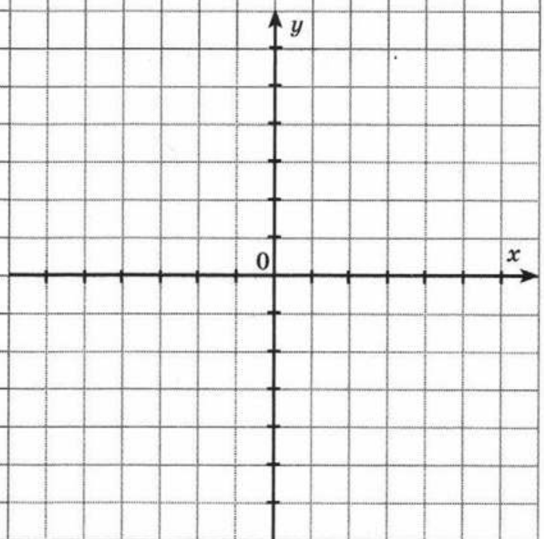
г) $x^3 - x - 2 = 0$



д) $x^2 - 2x - 8 = 0$ при $x \approx [-5; 5]$.

x	y

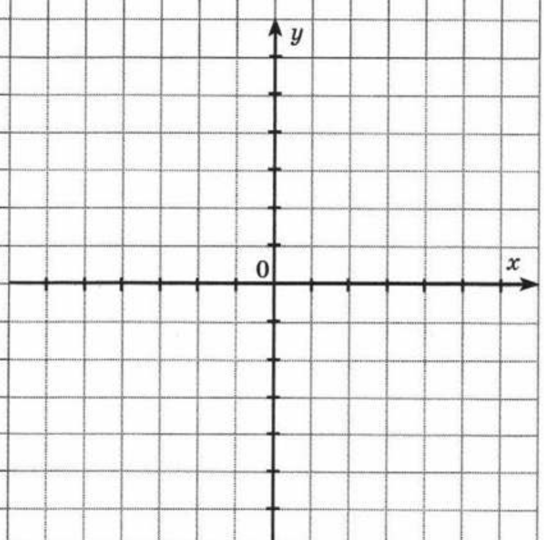
x	y



е) $x^2 + 5x - 10 = 0$

x	y

x	y



ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

1. Вероятность события

1. Решите задачу:

а) ***Пример.*** В лотерее 1000 билетов; из них на один билет выпадает выигрыш 500 руб., на 10 билетов — выигрыши по 100 руб., на 50 билетов — выигрыши по 20 руб., на 100 билетов — выигрыши по 5 руб., остальные билеты невыигрышные. Покупают один билет. Найдите вероятность выиграть не менее 20 руб.

Решение. Рассмотрим события: A — выиграть не менее 20 руб., A_1 — выиграть 20 руб., A_2 — выиграть 100 руб., A_3 — выиграть 500 руб. Очевидно, $A = A_1 + A_2 + A_3$. По правилу сложения вероятностей: $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}050 + 0{,}010 + 0{,}001 = 0{,}061$.

б) ***Пример.*** Из колоды карт случайно вытащили 1 карту. Найдите вероятности событий: A — вытянута карта червонной масти и B — вытянут туз.

Решение. Учитывая масти карт, получим, что из 36 исходов имеются соответственно 9 и 4 шансов. Поэтому $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$; $P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

в) Круговая мишень состоит из трёх зон: I, II и III. Вероятность попадания в первую зону при одном выстреле 0,15, во вторую 0,23, в третью 0,17. Найдите вероятность промаха.

г) На экзамене — 24 билета. Студент не выучил один билет и боится его вытянуть. Какова вероятность, что ему достанется несчастливый билет?

д) В лотерее 10 выигрышных билетов и 240 билетов без выигрыша. Какова вероятность выиграть в эту лотерею, купив один билет?

е) В лотерее 100 билетов, из них 5 выигрышных. Какова вероятность проигрыша?

ж) В ящике лежат 8 красных, 2 синих, 20 зелёных карандашей. Вы наугад вынимаете карандаш. Какова вероятность того, что это:

1) красный карандаш?

2) жёлтый карандаш?

3) не зёленый карандаш?

4) какое количество карандашей нужно вытянуть, чтобы с вероятностью, равной 1, среди них был зелёный карандаш?

з) В чемпионате мира по футболу участвуют 22 команды. Сколькими способами могут распределиться три призовых места?

и) Туристическая фирма планирует посещение туристами в Италии трёх городов: Венеции, Рима и Флоренции. Сколько существует вариантов такого маршрута?

к) В 10 классе изучается 12 предметов. Сколько различных вариантов расписания можно составить на понедельник, если в этот день 6 уроков и все разные?

л) На книжной полке помещается только 6 книг из 8. Сколькими способами можно заполнить этими книгами такую полку?

м) В магазине имеется четыре типа тумбочек: круглые, овальные, прямоугольные и треугольные. Сколькими способами можно расставить их в ряд?